

Trabalho de Conclusão de Curso

Um estudo da representação matemática das equações de Maxwell no contexto da álgebra geométrica de Clifford.

A study of the mathematical representation of Maxwell's equations in the context of Clifford's geometric algebra.

Nicolas Gama Coelho Rodrigues
Orientador: Dalton Couto Silva

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso, apresentamos de maneira lógica as quatro equações de Maxwell do eletromagnetismo, utilizando a estrutura algébrica de Clifford. Primeiramente, são introduzidas as equações de Maxwell na sua estrutura mais usual, presente na maioria dos livros didáticos, através da álgebra de Gibbs-Heaveside em formato diferencial. Posteriormente, fazemos um estudo sobre a estrutura da álgebra de Clifford, em específico os conceitos necessários, para a formalização do objetivo do trabalho. Assim, deduzimos as quatro equações utilizando a estrutura algébrica de Clifford, resultando em uma única equação.

Palavras-chave: Álgebra Geométrica. Equações de Maxwell. Eletromagnetismo

Abstract

In this undergraduate thesis, we present in a logical way the four Maxwell's equations of electromagnetism, using the algebraic structure of Clifford. Firstly, Maxwell's equations are introduced in their most common structure, present in most textbooks, through Gibbs-Heaveside algebra in differential form. Subsequently, we study the structure of Clifford algebra, in particular the necessary concepts for the formalization of the objective of the work. Thus, we deduce the four equations using the Clifford algebraic structure, resulting in a single equation.

Keywords: Geometric Algebra. Maxwell's Equations. Electromagnetism.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Serviço de Biblioteca e Documentação do IFSP Câmpus Caraguatatuba

R696e Rodrigues, Nicolas Gama Coelho
Um estudo da representação matemática das equações de Maxwell no contexto da álgebra geométrica de Clifford. / Nicolas Gama Coelho Rodrigues. -- Caraguatatuba, 2022. 17 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Dalton Couto da Silva.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -- Instituto Federal de São Paulo, Caraguatatuba, 2022.

1. Física. 2. Álgebra geométrica. 3. Equações de Maxwell. 4. Eletromagnetismo. I. Silva, Dalton Couto da, orient. II. Instituto Federal de São Paulo. III. Título.

CDD: 530



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CÂMPUS CARAGUATATUBA
FUC COORD CURSO SUP LICENC MATEMATICA**

OFÍCIO N.º 49/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

Nome: RODRIGUES, NICOLAS GAMA COELHO

Título: Um estudo da representação matemática das equações de Maxwell no contexto da álgebra geométrica de Clifford.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, câmpu Caraguatatuba para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Física.

Aprovado em: 9, Fevereiro de 2022

Banca Examinadora

Prof(a). Dalton Couto Silva

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). Nadjara dos Santos

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). José Roberto Severino Martins Jr

Instituto Federal de São Paulo – Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Documento assinado eletronicamente por:

- Dalton Couto Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/02/2022 16:28:38.
- Jose Roberto Severino Martins Junior, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/02/2022 19:23:18.
- Nadjara dos Santos, PROF ENS BAS TEC TECNOLOGICO-SUBSTITUTO, em 18/02/2022 08:41:24.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 296472

Código de Autenticação: 1b45dbd97d



OFÍCIO N.º 49/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

AVENIDA BAHIA, 1739, INDAIÁ, CARAGUATATUBA / SP, CEP 11665-071

1 Introdução

Para o estudo dos fenômenos do eletromagnetismo, atualmente é comum nos livros didáticos de física básica do ensino superior, o uso da estrutura algébrica desenvolvida independentemente por Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside para representar as equações de Maxwell, comumente chamada de álgebra vetorial.

James Clerk Maxwell, na publicação do *Treatise on Electricity and Magnetism* de 1873, utilizou ideias do formalismo dos quatérnions, que pode ser entendido, a grosso modo, como um espaço quadridimensional dos números dos complexos. Ele utilizou esse formalismo para descrever os fenômenos elétricos e magnéticos, porém, sua representação do instrumental matemático era um tanto complexa, o que levou Gibbs e Heaviside, ao lerem sua publicação, desenvolverem o cálculo vetorial. (SILVA; Cibelle, p. 76-80).

Segundo Silva (2002, p. 119) “[...] cálculo vetorial atual foi desenvolvido por Gibbs e Heaviside a partir do formalismo de quatérnions. Gibbs e Heaviside se interessaram por quatérnions após lerem o trabalho de Maxwell sobre eletromagnetismo, [...]”. O formalismo de quatérnions que a autora descreve é referente à álgebra dos quatérnions desenvolvida por Willian Rowan Hamilton em 1843, álgebra a qual segundo a mesma autora deu base para o desenvolvimento da álgebra de Clifford.

Willian Kingdon Clifford publicou em 1877 *Elements of Dynamic*, onde descreve a sua estrutura algébrica com base nos quatérnions de Hamilton e na álgebra exterior de Grassmann. De acordo com Silva (2002, p. 85), Clifford generalizou as duas álgebras, a exterior e dos quatérnions, construindo uma álgebra bem completa e coesa, porém complexa.

Apesar dos vários célebres matemáticos e físicos citados até o momento, vamos nos concentrar na teoria desenvolvida por Clifford, e boa parte deste trabalho será devotada ao tratamento necessário para a construção dos objetos e operações básicas dessa álgebra. Em seguida, os conceitos físicos envolvendo as Equações de Maxwell retornarão como uma aplicação, evidenciando a utilidade e beleza desta teoria. Vale ressaltar que, apesar da álgebra de Clifford não ser utilizada atualmente para descrever as Equações de Maxwell, é cientificamente importante conhecer diferentes visões e versões de um mesmo resultado.

O presente trabalho se deu na realização da pesquisa bibliográfica, exploratória e quantitativa que forneceu embasamentos teóricos para a construção das equações de Maxwell dentro da estrutura algébrica de Clifford, atualmente também conhecida como álgebra geométrica. Utilizou-se como recurso alguns dos conceitos apresentados das seguintes referências: as definições e operações da álgebra geométrica no plano e espaço euclidiano nos artigos “A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade” de 1999 e “A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a Teoria de Pauli” de 1996, ambos artigos do autor Jayme Vaz Jr; o livro “Álgebra geométrica e aplicações” dos autores Leandro Augusto Frata Fernandes, Carlile Lavor e Manuel Menezes de Oliveira Neto; e as equações

de Maxwell do eletromagnetismo na álgebra comumente utilizada de Gibbs-Heaviside no livro “Curso de Física Básica: Eletromagnetismo” do autor Herch Moysés Nussenzveig e “The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell Vol. II. 1862-1873” de 1995 para consulta do formalismo algébrico original. Outras fontes de autores como Randal Knight do livro "Física 3 - Uma abordagem estratégia" e Cibelle C. Silva da tese "Da força ao Tensor", serviram como consulta histórica do objeto pesquisado.

Como comentado acima, a álgebra desenvolvida por Gibbs e Heaviside se tornou padrão no tratamento da teoria do eletromagnetismo, por seu caráter menos complexo, quando comparada a outras estruturas algébricas. Entretanto, a álgebra de Clifford possui um caráter generalizador e unificador, como citado anteriormente. Assim, é natural se perguntar como seriam as equações de Maxwell através da álgebra de Clifford. Esse estudo nos possibilita compreender melhor uma nova estrutura matemática e também os próprios conceitos do eletromagnetismo. Ainda, futuras comparações e análises entre as diversas estruturas algébricas são possibilidades de continuidade deste trabalho.

2 As equações de Maxwell na álgebra de Gibbs-Heaviside

De acordo com (SILVA, 2002) as intenções de Maxwell em seus estudos era sintetizar os campos de conhecimentos da eletricidade e do magnetismo. Seu trabalho demorou cerca de dez anos de estudos, que trouxe consigo grandes avanços científicos no final do século XVIII, apresentando a existência de uma força única que denominou força eletromagnética (KNIGHT, 2009).

Em seu trabalho original publicado em 1873, *A Treatise on electricity and magnetism*, MAXWELL (1995) descreveu suas equações utilizando o formalismo hamiltoniano. Atualmente as equações de Maxwell são representadas pelo formalismo vetorial de Gibbs-Heaviside, este fato se deve ao qual que, segundo SILVA (2002), houve grande debate na época do surgimento das primeiras pesquisas entre os cientistas para descrever uma matemática mais acessível aos pesquisadores, enquanto outros defendiam o formalismo matemático. Assim, reescreveram as equações de Maxwell, para o formalismo mais adotado pela comunidade científica utilizada até os dias de hoje. Segundo Knight (2009), nem mesmo Gauss, Ampère ou Faraday reconheceriam suas próprias leis nas formas de equações, não devido ao formalismo matemático utilizado por Maxwell, mas sim pelo seu trabalho de unificação.

Abaixo, se encontram as quatro equações que Maxwell desenvolveu em seu formato diferencial. São consideradas fundamentais pois dessas quatro equações surge toda teoria eletromagnética, embora Knight (2009) complementa a teoria eletromagnética sendo: as quatro equações de Maxwell com a força de Lorentz.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{I} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \quad (4)$$

A Equação 1 se refere ao divergente do campo elétrico (\vec{E}) ser igual a densidade de carga elétrica (ρ) dividida pela constante de permissividade elétrica (ϵ_0), também chamada de Lei de Gauss para o campo elétrico. A presença de densidade elétrica implica na existência de cargas elétricas, portanto cargas elétricas produzem campos elétricos.

A lei de Faraday é o nome dado a Equação 2. Nela a variação de um campo magnético (\vec{B}) também gerará um campo elétrico. O sinal negativo na expressão chama-se Lei de Lenz que surge por meio de conservação de energia, e determina a direção do fluxo elétrico gerado pela variação do campo magnético.

A Equação 3 é a Lei de Gauss para o magnetismo, ditando a inexistência de "densidade magnética", não existindo "cargas magnéticas", ou melhor descrevendo conceitualmente, não existem monopolos magnéticos.

A lei de Ampère-Maxwell é a Equação 4. Ela recebe este nome pois Maxwell ao desenvolver seu trabalho, fez uma correção à lei de Ampère. Segundo (KNIGHT, 2009) esta correção foi o grande marco de Maxwell, pois foi o primeiro a perceber a variação de um campo magnético devido a variação de um fluxo elétrico numa região fora do condutor. Esta equação descreve o surgimento de um campo magnético, em uma densidade de corrente, ou seja, cargas em movimento; e na variação do fluxo elétrico. O segundo termo em parenteses desta equação ($\epsilon_0 \frac{dE}{dt}$) é denominado de corrente de deslocamento, a correção de Maxwell e μ_0 constante de proporcionalidade chamada de permeabilidade magnética. Para este trabalho, vamos utilizar algumas notações, a fim de simplificar algumas equações. Por exemplo, $D = \epsilon_0 E$, da densidade de fluxo elétrico e $H = \frac{B}{\mu_0}$, da intensidade de campo magnético, ambas as notações também são utilizadas em diversas aplicações pelos autores Hayt e Buck (2013), em seu livro de eletromagnetismo.

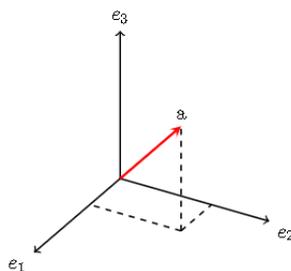
3 Álgebra geométrica: elementos primitivos e operadores

A estrutura da álgebra geométrica, a qual vamos estudar a partir dessa seção, é aplicável em diversas áreas da física, como por exemplo, à teoria relativística, apresentada por VAZ JUNIOR (1999) em seu artigo. Neste contexto, a álgebra geométrica, por sua generalidade de não depender de propriedades métricas e do espaço utilizado, facilita o

entendimento da teoria caso o número de dimensões seja um obstáculo. Este mesmo autor em outro artigo, descreve a construção do Spinor dentro da álgebra geométrica para discutir a teoria de Pauli do ponto de vista geométrico.

Vamos agora começar nosso estudo da álgebra geométrica, e para isso, precisamos de um ponto de partida minimamente conhecido. Esse ponto de partida será a álgebra linear. Na conhecida álgebra linear, seus elementos primitivos são os *vetores*. Segundo Steinbruch e Winterle (1987), vetores são segmentos de retas orientados, possuindo módulo, sentido e direção. A Figura 1 apresenta um vetor como exemplo numa base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

Figura 1 – Vetor arbitrário a numa base $\{e_1, e_2, e_3\}$.



Fonte própria.

Um vetor arbitrário em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como combinação linear dos vetores dessa base como:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathbb{R}^3,$$

onde α_i é o i -ésimo coeficiente de a . Este mesmo raciocínio pode ser empregado para qualquer dimensão n , sendo a um vetor pertencente ao \mathbb{R}^n . Assim, o conjunto de vetores fechados a soma e multiplicação por um escalar, formam uma estrutura matemática chamada de espaço vetorial.

Uma das vantagens da álgebra geométrica, segundo Fernandes, Lavor e Neto (2017), é que: além de resolver diversos problemas de semântica relacionados a interpretação do elemento primitivo do ponto de vista computacional, enquanto o \mathbb{R}^3 possui restrições para caracterizar o espaço físico apenas com elementos unidimensionais, os objetos geométricos de interesse vão além de noções de direções. Assim ele conclui:

”Logo, os objetos matemáticos presentes em \mathbb{R}^3 não são suficientemente adequados para caracterizar uma grande variedade de objetos geométricos do espaço físico. [...], o espaço vetorial \mathbb{R}^3 não é a melhor representação matemática para o espaço físico tridimensional. O uso de subespaços vetoriais como objetos matemáticos seria mais adequado.” (FERNANDES; LAVOR; NETO, 2017)

Como o autor conclui, a álgebra linear é limitada em relação aos objetos matemáticos. Assim, a álgebra geométrica será, como veremos, uma alternativa a essa restrição de dimensionalidade, sendo possível dentro de sua estrutura, construir subespaços de dimensionalidades diversas e realizar operações entre elas, como veremos a seguir.

3.1 Primitivas da Álgebra Geométrica

É importante deixar claro que, neste trabalho, vamos construir uma estrutura matemática de álgebra geométrica sobre \mathbb{R}^3 . Isso quer dizer que todos os vetores que serão pensados e trabalhados estarão em \mathbb{R}^3 , assim como os subespaços. A teoria pode ser generalizada para espaços vetoriais de dimensão maior, mas neste trabalho, optamos por focar no espaço tridimensional, uma vez que este será suficiente para o desenvolvimento da teoria de Maxwell. Na álgebra geométrica, uma das maneiras de construir subespaços de dimensionalidades superiores é a partir do produto externo entre dois entes matemáticos. Como exemplo, o produto externo entre dois vetores a e b linearmente independentes é escrito por:

$$C_{\langle 2 \rangle} = a \wedge b,$$

onde $C_{\langle 2 \rangle}$ é o subespaço resultante do produto externo (denotado por \wedge "cunha") dos vetores a e b . Como a Figura 2 apresenta, este subespaço tem a forma de um disco que respeita as orientações e módulo dos vetores a e b . A direção é dada pela ordem dos vetores, neste caso de a para b , sendo conveniente entender como orientação o sentido que o plano rotaciona, enquanto o módulo de $a \wedge b$, sendo a velocidade de rotação do plano. Esta operação de produto externo é semelhante ao produto vetorial da álgebra linear, possuindo como propriedades: associatividade, distributividade, comutatividade entre escalares e antissimetria. Isso significa, que, dados três vetores a , b e c de \mathbb{R}^3 e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

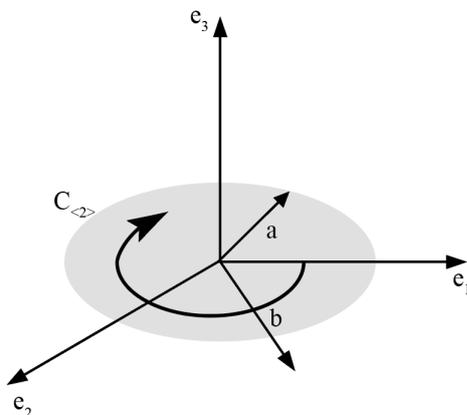
$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c), \\ a \wedge (b + c) &= a \wedge b + a \wedge c, \\ (\alpha a) \wedge b &= a \wedge (\alpha b) \\ a \wedge b &= -b \wedge a \end{aligned}$$

Dentro de uma base do \mathbb{R}^3 , é possível construir também o subespaço 3-dimensional, utilizando-se o produto externo entre 3 vetores linearmente independentes:

$$D_{\langle 3 \rangle} = a \wedge b \wedge c \equiv e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

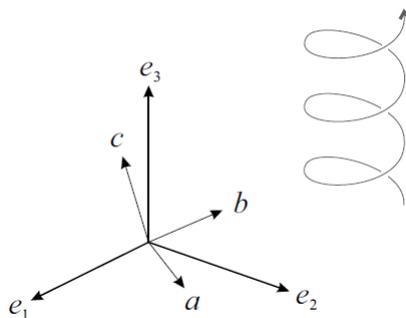
onde $D_{\langle 3 \rangle}$ é igual em dimensionalidade ao \mathbb{R}^3 , porém possuindo direção, sentido e módulo. Na Figura 3 da representação do $D_{\langle 3 \rangle}$, a espiral é representada com o sentido respeitado

Figura 2 – Subespaço 2-dimensional $C_{\langle 2 \rangle}$, expandido pelos vetores a e b . A seta circular indica a direção do disco, que tem magnitude representado pelo raio do disco.



Fonte própria.

Figura 3 – Subespaço 3-dimensional $D_{\langle 3 \rangle}$, expandido pelos vetores a , b e c .



Fonte: Fernandes, Lavor e Neto (2017)

pela ordem dos três vetores. Já o módulo seria a velocidade com que o deslocamento por esta espiral ocorre, ou densidade de espaço segundo Fernandes, Lavor e Neto (2017).

Desta maneira, pode-se generalizar o produto externo para gerar subespaços de k -dimensionalidades, a partir de k vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^n , onde $0 \leq k \leq n$. Por definição dentro da álgebra geométrica, estes subespaços são chamados de k -blades, sendo k o grau do blade. Como exemplo, os blades utilizados nas figuras 2 e 3 são de grau 2 e 3, respectivamente. Diferentemente da álgebra vetorial onde os vetores são os elementos primitivos do subespaço vetorial, na álgebra geométrica, os blades são os elementos primitivos, de um subespaço chamado espaço multivetorial.

Por definição o espaço multivetorial será representado por $\bigwedge \mathbb{R}^n$. Os subespaços de cada grau, ou seja, as k -blades, estão contidos nele. Por exemplo, um espaço multivetorial para o $\bigwedge \mathbb{R}^3$, conterá os subespaços $\bigwedge^0 \mathbb{R}^3$ dos escalares, o $\bigwedge^1 \mathbb{R}^3$ dos vetores, o $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ dos bivectores, ou 2-blades e por final o $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ dos 3-blades, também chamados de trivetores. Um multivetor será qualquer combinação linear destes subespaços. Abaixo temos

representado um exemplo de uma base do $\bigwedge \mathbb{R}^3$ formado a partir dos vetores linearmente independentes e_1 , e_2 e e_3 .

$$\left\{ 1, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \right\}$$

Na representação acima, os elementos de base são espaçados em agrupamentos de subespaços de graus k -blades. O interessante é sempre reescrever os multivetores de maneira que apareçam as componentes de sua base ordenadamente. Este processo chama-se reordenação canônica. Por exemplo, seja um multivetor $w = 7e_2 - 3(e_2 \wedge e_1) - 9 + 4(e_1 \wedge e_3 \wedge e_2)$, do espaço multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^3$. Com a reordenação canônica, levando em consideração a propriedade antissimétrica do produto externo, obtém-se que $w = -9 + 7e_2 + 3(e_1 \wedge e_2) - 4(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$. Observe que $e_i \wedge e_i = 0$ para todo $i = 1, 2, 3$. Esse fato segue da antissimetria, pois, por exemplo, $e_1 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_1$, ou seja, $2e_1 \wedge e_1 = 0$, e portanto, $e_1 \wedge e_1 = 0$.

Faremos outro exemplo de reordenação canônica. Seja o multivetor abaixo:

$$v = e_1 \wedge (9e_1 + 8e_1 \wedge e_2 - 3e_2 \wedge e_3) - e_2 \wedge (e_1 \wedge e_3 + 7) - 1$$

Aplicando a distributiva do produto externo:

$$v = 9e_1 \wedge e_1 + 72e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) - 3e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge 7 - 1$$

Utilizando as propriedades de simetria e comutatividade:

$$v = -3e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - 1$$

Agora reordenando de acordo com a base, finaliza-se em:

$$v = -1 + e_1 \wedge e_2 - 3e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

3.2 Outros produtos da Álgebra Geométrica

Nesta seção iremos apresentar vários produtos entre diversos tipos de elementos contidos na álgebra geométrica, sendo os principais conceitos para a realização deste trabalho: o produto geométrico, dualidade e produto vetorial.

3.2.1 Produto Interno entre dois vetores

O produto interno é um dos produtos da álgebra geométrica que depende da métrica utilizada e para fins deste trabalho, o uso da métrica euclidiana será suficiente para se atingir o objetivo.

A métrica euclidiana é tal qual os produtos internos entre dois vetores de base independentes é:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Desta maneira, o produto interno entre dois vetores se reduz ao produto escalar de vetores da álgebra linear. Por exemplo, considere dois vetores $a = 2e_3 - e_1$ e $b = 5e_2 + e_1 - 4e_3$, o produto interno entre esses vetores é calculado como:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (2e_3 - e_1) \cdot (5e_2 + e_1 - 4e_3) \\ &= 2e_3 \cdot 5e_2 + 2e_3 \cdot e_1 + 2e_3 \cdot (-4e_3) - e_1 \cdot 5e_2 - e_1 \cdot e_1 - e_1 \cdot (-4e_3) \\ &= 10 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 8 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ &= -8 - 1 = -9 \end{aligned}$$

3.2.2 Produto entre Blades

O produto entre Blades é uma generalização simples do produto interno entre vetores para as k -blades, em outras palavras, expande o uso do produto interno entre vetores unidimensionais, para tratar do produto interno entre subespaços com mesma dimensionalidade. Essa operação possui como propriedades: a simetria, distributividade e comutatividade de escalares. Denotada pelo símbolo do asterisco (*).

Como exemplo, sejam duas blades $A_{\langle 2 \rangle} = e_1 \wedge e_2 + 7e_2 \wedge e_3$ e $B_{\langle 2 \rangle} = -2e_1 \wedge e_2 + 3e_1 \wedge e_3$ ambos de dimensionalidade 2, o produto entre essas duas blades é dado por:

$$A_{\langle 2 \rangle} * B_{\langle 2 \rangle} = (e_1 \wedge e_2 + 7e_2 \wedge e_3) * (-2e_1 \wedge e_2 + 3e_1 \wedge e_3)$$

Como a operação possui a propriedade distributiva, temos:

$$= (e_1 \wedge e_2) * (-2e_1 \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2) * (3e_1 \wedge e_3) + (7e_2 \wedge e_3) * (-2e_1 \wedge e_2) + (7e_2 \wedge e_3) * (3e_1 \wedge e_3)$$

e agora, utilizando a comutatividade dos escalares:

$$= -2(e_1 \wedge e_2) * (e_1 \wedge e_2) + 3(e_1 \wedge e_2) * (e_1 \wedge e_3) - 14(e_2 \wedge e_3) * (e_1 \wedge e_2) + 21(e_2 \wedge e_3) * (e_1 \wedge e_3)$$

Assumindo a métrica euclidiana, o produto entre blades é 0 caso os elementos sejam distintos ou 1 caso sejam iguais, resultando em:

$$= -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 14 \cdot 0 + 21 \cdot 0 = -2.$$

Caso os graus de blades sejam ambos iguais a $k = 1$, do subespaço dos vetores, o produto entre blades se iguala ao produto interno ($a * b = a \cdot b$).

3.2.3 Contração à esquerda

A contração à esquerda, segundo Fernandes, Lavor e Neto (2017) é um dos produtos métricos mais importantes da álgebra geométrica, denotado por \rfloor . Este produto pode ser utilizado entre os elementos independentemente de suas dimensionalidades, desde que a contração à esquerda seja aplicada de um blade de menor grau a outro blade de maior grau. Seja $C_{\langle s-r \rangle} = A_{\langle r \rangle} \rfloor B_{\langle s \rangle}$ o resultado da operação, veja que $C_{\langle s-r \rangle}$, possui como dimensionalidade $k = s - r$, indicando que a dimensão $s \geq r$. Essa operação possui as propriedades distributiva e comutatividade de escalares. Caso $r = s$, ou seja, os elementos possuam mesmo grau, a contração a esquerda é simplificada para o produto entre dois blades ($A_{\langle r \rangle} \rfloor B_{\langle s \rangle} = A_{\langle s \rangle} * B_{\langle s \rangle}$) e possui a propriedade de simetria.

Mas como esse produto funciona, ou seja, qual é o resultado da contração à esquerda entre duas blades? Este produto pode ser entendido como remover de $B_{\langle s \rangle}$ a parte parecida com $A_{\langle r \rangle}$. Como exemplo, considere os blades $A_{\langle 1 \rangle} = 4e_1 - 2e_2 + e_3$ e $B_{\langle 2 \rangle} = 3e_1 \wedge e_2$. Calculando a contração a esquerda entre os blades temos:

$$A_{\langle 1 \rangle} \rfloor B_{\langle 2 \rangle} = (4e_1 - 2e_2 + e_3) \rfloor (3e_1 \wedge e_2)$$

Utilizando as propriedades distributiva e comutativa de escalares:

$$= 12(e_1 \rfloor e_1 \wedge e_2) - 6(e_2 \rfloor e_1 \wedge e_2) + 3(e_3 \rfloor e_1 \wedge e_2)$$

Olhando para o primeiro termo, $12(e_1 \rfloor e_1 \wedge e_2)$ e utilizando a interpretação "remover de $e_1 \wedge e_2$ a parte parecida com e_1 ", obtém-se: e_2 . No segundo termo, utiliza-se o mesmo raciocínio. Porém existe uma interpretação a ser considerada quanto a orientação envolvida no resultado. O que pôde ser notado neste produto é uma regra prática para facilitar quanto ao sinal do resultado. Voltando a verificar o primeiro termo, note que o vetor e_1 está próximo da contração a esquerda com próprio e_1 , seguido do produto externo com e_2 . Quando isso ocorre, ao utilizar a interpretação de remover a parte parecida, o sinal continua o mesmo e não se altera, dando como resultado e_2 . Agora no segundo termo, o produto de $e_2 \rfloor e_1 \wedge e_2 = -e_1$, com sinal negativo de e_1 , indicando direção contrária. Perceba que neste processo a operação de contração a esquerda em $e_2 \rfloor e_1 \wedge e_2$ é aplicado em e_2 com e_1 , sendo vetores diferentes. Neste caso o sinal deve ser inverso da "parte removida" de $B_{\langle 2 \rangle}$.

A Tabela 1 apresenta o resultado de cada contração esquerda entre os vetores e blades de grau 2 da base.

Desta maneira o resultado final de $A_{\langle 1 \rangle} \rfloor B_{\langle 2 \rangle} = 12e_2 + 6e_1 + 3e_1 = 9e_1 + 12e_2$.

3.2.4 Produto Geométrico

Sejam dois vetores $a, b \in \bigwedge \mathbb{R}^3$, o produto geométrico entre vetores é definido como sendo a aplicação linear da soma entre o produto escalar e o produto externo, ou seja,

\lrcorner	$e_1 \wedge e_2$	$e_1 \wedge e_3$	$e_2 \wedge e_3$
e_1	e_2	e_3	0
e_2	$-e_1$	0	e_3
e_3	0	$-e_1$	$-e_2$

Tabela 1 – Tabela de operação da contração esquerda (\lrcorner) entre vetores e 2-blades pertencentes ao $\bigwedge \mathbb{R}^3$

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

A partir desta operação observe que, dados dois vetores linearmente independentes, ou seja, dois vetores em que $a \cdot b = 0$, o produto geométrico entre os vetores coincide com o produto externo entre eles. Por exemplo: $e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$, $e_1 e_3 = e_1 \wedge e_3$ e $e_2 e_3 = e_2 \wedge e_3$.

Considere os vetores $a = 2e_2 + 5e_3$ e $b = -2e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Como exemplo, o produto geométrico desses vetores dado pela definição é

$$ab = (2e_2 + 5e_3) \cdot (-2e_1 + 2e_2 + 3e_3) + (2e_2 + 5e_3) \wedge (-2e_1 + 2e_2 + 3e_3).$$

Calculando o produto escalar:

$$= 4(e_2 \cdot e_2) + 15(e_3 \cdot e_3) + (2e_2 + 5e_3) \wedge (-2e_1 + 2e_2 + 3e_3).$$

Propriedade distributiva e antissimétrica:

$$= 19 + 2(e_1 \wedge e_2) + 4(e_2 \wedge e_2) + 6(e_2 \wedge e_3) + 10(e_1 \wedge e_3) - 10(e_2 \wedge e_3) + 15(e_3 \wedge e_3).$$

Lembrando que $e_2 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_3 = 0$, e somando alguns outros termos, temos:

$$ab = 19 + 2(e_1 \wedge e_2) + 10(e_1 \wedge e_3) - 4(e_2 \wedge e_3).$$

Neste caso o produto geométrico dos vetores resultou em um multivetor.

Seja agora um vetor a e um 2-blade (bivetor) B , para este caso o produto geométrico é definido pela soma da contração a esquerda em relação a B com o produto externo, ou seja:

$$aB = a \lrcorner B + a \wedge B.$$

Note que, na métrica euclidiana, o produto geométrico entre o vetor e_1 com bivetor $e_2 \wedge e_3$ é o resultado do produto externo dos 3 vetores linearmente independentes do $\bigwedge \mathbb{R}^3$, ou seja, $e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3)$, simplificando a notação para o produto externo. Assim é conveniente reescrever a base em termos do produto geométrico dos vetores independentes de $\bigwedge \mathbb{R}^3$ para métrica euclidiana. A nova base é descrita por:

$$\left\{ 1, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_1 e_2, \quad e_1 e_3, \quad e_2 e_3, \quad e_1 e_2 e_3 \right\}$$

Desta maneira o produto geométrico em $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é a operação linear distributiva e associativa induzida pelas relações:

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i \wedge e_j, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Como consequência se $i \neq j$, $e_i e_j = -e_j e_i$ pela propriedade antissimétrica do produto externo.

Vamos agora ver dois exemplos deste produto: Considere o vetor $a = e_1 + e_2 + e_3$ e o bivector $B = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3$. O produto geométrico aB é dado por:

$$aB = (e_1 + e_2 + e_3) \rfloor (e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) + (e_1 + e_2 + e_3) \wedge (e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3)$$

Utilizando a propriedade distributiva:

$$aB = (e_2 + e_3 - e_1 + e_3 - e_1 - e_2) + (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) - (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) + (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$$

Alterando os produtos externos para produtos geométricos:

$$aB = (e_2 + e_3 - e_1 + e_3 - e_1 - e_2) + (e_1 e_2 e_3) - (e_1 e_2 e_3) + (e_1 e_2 e_3)$$

$$aB = -2e_1 + 2e_3 + (e_1 e_2 e_3)$$

Observe que já se poderia ter utilizado a troca entre produtos externos por geométricos diretamente devido a definição da métrica euclidiana, facilitando a operação do produto geométrico por meio das propriedades.

Outro exemplo: considere um vetor $a = e_1 + 2e_2 - e_3$ e um multivector $B = 5e_1 e_2 - 3e_1 e_2 e_3$. O produto geométrico aB é dado por:

$$aB = (e_1 + 2e_2 - e_3) \rfloor (5e_1 e_2 - 3e_1 e_2 e_3) + (e_1 + 2e_2 - e_3) \wedge (5e_1 e_2 - 3e_1 e_2 e_3)$$

Fazendo a distributiva e aplicando anti simetria:

$$(5e_2 - 10e_1 - 3e_2 e_3 + 6e_1 e_3 + 3e_1 e_2) - 5(e_1 e_2 e_3)$$

Reordenando canonicamente finaliza-se em:

$$aB = -10e_1 + 5e_2 + 3e_1 e_2 + 6e_1 e_3 - 3e_2 e_3 - 5e_1 e_2 e_3$$

3.2.5 Reversão, Dualidade e Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores da álgebra de Gibbs-Heaviside resulta no que é chamado como pseudo-vetor. Este nome é dado por seu comportamento se assemelhar a um vetor, porém orientando o giro de um plano de acordo com a regra da mão direita. Ele

possui a propriedade de não se alterar devido a uma inversão espacial dos outros vetores que o geraram pelo produto vetorial.

Uma das características que torna a álgebra geométrica coerente em termos de estrutura algébrica, segundo VAZ JUNIOR (1996), é a possibilidade de incluir subespaços. Para este caso, o subespaço dos pseudo-vetores para um espaço multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^n$, pertencem ao subespaço de dimensionalidade $n - 1$.

Seja a e b dois vetores, o produto vetorial é definido como

$$a \times b = \star(a \wedge b) = -\mathbf{I}(a \wedge b) = -(a \wedge b)\mathbf{I}, \quad (5)$$

onde $\mathbf{I} = e_1 e_2 e_3 \in \bigwedge \mathbb{R}^3$.

O sinal estrela (\star) representa o espaço dual de $(a \wedge b)$. Dado um $A_{\langle k \rangle}$ blade de grau k , o seu dual ($\star A_{\langle k \rangle}$) é definido como

$$\star A_{\langle k \rangle} = \tilde{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{I},$$

onde $\tilde{A}_{\langle k \rangle}$ é chamado de reversão do blade $A_{\langle k \rangle}$, que é definido como

$$\tilde{A}_{\langle k \rangle} = (-1)^{k(k-1)/2} A_{\langle k \rangle}.$$

Esse fator que aparece a frente do k -blade, surge da interpretação do “reverso” do produto externo, de maneira que se inverter a ordem dos fatores, surge o fator $k(k-1)/2$ no resultado da operação.

Essa definição de dual traz consigo um isomorfismo canônico entre os subespaços $\bigwedge^k \mathbb{R}^3$ e $\bigwedge^{3-k} \mathbb{R}^3$, uma vez que suas dimensionalidades são iguais. Por exemplo, seja o vetor e_1 o seu dual, $\star e_1$, é dado por:

$$\star e_1 = (-1)^{k(k-1)/2} e_1 \mathbf{I}$$

como $k = 1$ e calculando o produto geométrico, obtém-se:

$$\star e_1 = 1e_1 e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3.$$

Note que existe uma dependência na orientação de $\mathbf{I} = e_1 e_2 e_3$ no resultado da operação e a semelhança do resultado com a regra da mão direita. O valor do dual de \mathbf{I} para o subespaço do $\bigwedge \mathbb{R}^3$ é igual a 1, neste contexto ele é considerado um valor escalar. Outro destaque é a semelhança deste \mathbf{I} com o número imaginário i dos números complexos, pois $\mathbf{I}^2 = -1$.

4 Equações de Maxwell no contexto da álgebra geométrica

Para a descrição das equações de Maxwell apresentadas na seção 2 dentro do espaço de Clifford, é necessário definir o operador nabla (∇). Segundo VAZ JUNIOR (1996),

como o espaço métrico utilizado não apresenta torções, pode-se utilizar os vetores convencionais paralelos aos eixos de coordenadas cartesianas. Por definição o operador nabla em coordenadas cartesianas é escrito de tal forma que:

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Este operador ∇ age em funções $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigwedge \mathbb{R}^3$, ou seja, funções que levam vetores $v = (x_1, x_2, x_3)$ em multivetores

$$A(v) = A_0(v) + A_1(v)e_1 + A_2(v)e_2 + A_3(v)e_3 + A_{12}(v)e_1e_2 + A_{13}(v)e_1e_3 + A_{23}(v)e_2e_3 + A_{123}(v)e_1e_2e_3.$$

Como o operador nabla possui propriedades como módulo, direção e sentido, pode-se escrever o produto geométrico do operador a uma função multivetorial $A \in \bigwedge \mathbb{R}^3$:

$$\nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A,$$

Quando a função A é um campo vetorial, ou seja, $A(v) = A_1(v)e_1 + A_2(v)e_2 + A_3(v)e_3$, então o primeiro termo $\nabla \cdot A$ representa o divergente do campo A e o segundo termo, utilizando a definição do produto vetorial, $\nabla \wedge A = \star(\nabla \times A)$ da Equação 5, resultando o espaço dual do rotacional do campo A . Desta maneira o produto geométrico do operador nabla aplicado ao campo multivetorial pode ser reescrito como

$$\nabla A = \text{div}A + \mathbf{I}(\text{rot } A) = \nabla \cdot A + \mathbf{I}\nabla \times A. \quad (6)$$

4.1 Unificando as equações de Maxwell

Afim de simplificar as passagens para a apresentação das equações Maxwell na álgebra geométrica, utilizamos as relações de densidade de fluxo elétrico $D = \epsilon_0 E$ e intensidade de fluxo magnético $H = B/\mu_0$ para que os campos vetoriais sejam independentes das constantes de proporcionalidades da permissividade elétrica (ϵ_0) e da permeabilidade magnética (μ_0). Desta maneira é necessário outra alteração na Equação 4, que ao invés de corrente I , utiliza-se a densidade de corrente elétrica \vec{J} .

Seja \mathcal{F} uma função multivetorial da soma dos campos de densidade de campo elétrico D e intensidade do fluxo magnético H , ou seja $\mathcal{F} = D + H$, o operador nabla aplicado a esta função se escreve como:

$$\nabla \mathcal{F} = \nabla(D + H) = \nabla D + \nabla H,$$

aplicando o resultado obtido pela Equação 6, e as equações de Maxwell, obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla D &= \nabla \cdot D + \mathbf{I}(\nabla \times D) = \rho - \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla H &= \nabla \cdot H + \mathbf{I}(\nabla \times H) = 0 + \mathbf{I} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Como se nota nas equações acima, cada multivetor possui uma parcela que representa o dual do outro multivetor, portanto é interessante que a intensidade do campo magnético seja representado como o subespaço dual do fluxo elétrico ou vice-versa para a unificação. Assim a função \mathcal{F} sera agora representada por $\mathcal{F} = D + \mathbf{I}H$ e as expressões obtidas aplicadas ao operador nabla resultam:

$$\nabla D = \nabla \cdot D + \mathbf{I}(\nabla \times D) = \rho - \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla H = \nabla \cdot H + \mathbf{I}(\nabla \times \mathbf{I}H) = 0 + \mathbf{I}^2 \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \quad (8)$$

Na Equação 8 aparece o termo $\nabla \times \mathbf{I}$, porém este rotacional é nulo pois para o subespaço $\wedge \mathbb{R}^3$, o \mathbf{I} é considerado pseudo-escalar. Sabendo que $\mathbf{I}^2 = -1$, podemos expressar a soma das equações como

$$\nabla D + \nabla \mathbf{I}H = \rho - J - \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Pode-se melhorar a ideia da unificação na criação de um outro operador. Simplificando a expressão, isolando D e H , obtém-se:

$$\nabla D + \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \mathbf{I}H + \frac{\partial \mathbf{I}H}{\partial t} = \rho - J$$

Fatorando D e H por agrupamento:

$$\left(\nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) (D + \mathbf{I}H) = \rho - J$$

Assim, fica evidenciado o novo operador e a expressão acima é equiparada com o resultado obtido por VAZ JUNIOR (1996). Detonando o operador como

$$\mathcal{D} = \left(\nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

e a outra igualdade por

$$\mathcal{J} = \rho - J,$$

a unificação é expressa finalmente como

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{J}. \quad (9)$$

Vamos mostrar que de fato essa equação contém as quatro equações de Maxwell e que pode-se associar o multivetor gerado para cada equação. Partindo do desenvolvimento da Equação 9 com as definições apresentadas, temos:

$$\left(\nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) (D + \mathbf{I}H) = \rho - J.$$

Distribuindo os termos e aplicando o operador:

$$\nabla \cdot D + \nabla \wedge D + \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{I}(\nabla \cdot H) + \mathbf{I}(\nabla \wedge H) + \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t} = \rho - J.$$

Pode-se comparar o resultado ao lado direito da equação com o lado esquerdo de acordo com seus respectivos graus. Utilizando a relação da Equação 5 e ordenando os termos de acordo com o grau de cada termo, obtém-se algo como o esquema abaixo.

$$\underbrace{\nabla \cdot D}_{\Lambda^0 \mathbb{R}^3} + \underbrace{\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{I}(\nabla \wedge H)}_{\Lambda^1 \mathbb{R}^3} + \underbrace{\nabla \wedge D + \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t}}_{\Lambda^2 \mathbb{R}^3} + \underbrace{\mathbf{I} \nabla \cdot H}_{\Lambda^3 \mathbb{R}^3} = \underbrace{\rho}_{\Lambda^0 \mathbb{R}^3} - \underbrace{J}_{\Lambda^1 \mathbb{R}^3}$$

Note que os subespaços $\Lambda^2 \mathbb{R}^3$ e $\Lambda^3 \mathbb{R}^3$ ao lado esquerdo da equação são iguais a zero, por não ter um correspondente ao lado direito. Assim é possível obter as equações de Maxwell a partir de cada comparação, conforme apresenta-se abaixo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho \\ \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{I}(\nabla \wedge H) &= -J \rightarrow \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \wedge D + \mathbf{I} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \rightarrow \nabla \times D = -\frac{\partial H}{\partial t} \\ \mathbf{I} \nabla \cdot H &= 0 \rightarrow \nabla \cdot H = 0 \end{aligned}$$

5 Considerações Finais

O presente trabalho matemático se deu na pesquisa bibliográfica exploratória que de uma certa forma buscou transpor didaticamente os conceitos da álgebra geométrica utilizando como contexto a unificação das equações de Maxwell. Na apresentação dos multivetores e as principais operações envolvidas neste espaço, buscamos detalhar as operações utilizando algumas de suas propriedades e procurando exemplificar ao máximo os conceitos. Assim, com essa abordagem espera-se que os leitores possam compreender melhor as entidades da álgebra geométrica e suas operações, antes de desenvolver a unificação das equações. Definimos o operador vetorial nabla e o produto geométrico deste como um multivetor; e utilizando as equações de Maxwell da álgebra vetorial, construímos a unificação das quatro equações apresentando um outro operador no contexto da álgebra geométrica ($\mathcal{DF} = \mathcal{J}$) e mostramos que a partir desta é possível obter-se as equações de Maxwell, por meio de uma comparação entre os graus de subespaços da equação.

Em trabalhos futuros, existe a possibilidade de utilizar a estrutura da algébrica geométrica assim como neste trabalho em outros contextos, como a mecânica quântica e a relatividade. Além disso, poderia se apropriar dos resultados matemáticos obtidos com o objetivo de pesquisar a interpretação do que se conhece atualmente dos fenômenos físicos.

Como por exemplo se o resultado $\rho - J$ obtido neste trabalho possui alguma finalidade e como pode ser interpretado do ponto de vista físico.

Referências

FERNANDES, L. A. F.; LAVOR, C.; NETO, M. M. de O. *Álgebra Geométrica e Aplicações*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2017.

HAYT, W.; BUCK, J. *Eletromagnetismo - 8ed.* Bookman Editora, 2013. ISBN 9788580551549. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=emU3AgAAQBAJ>>.

KNIGHT, R. *Física: Uma Abordagem Estratégica - Vol 3.* Bookman, 2009. ISBN 9788577805532. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=oGFnGdB-prcC>>.

MAXWELL, J. C. *The scientific letters and papers of james clerk maxwell 1862-1873.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

NUSSENZVEIG, H. *Curso De Fisica Basica, V.3 - Eletromagnetismo.* EDGARD BLUCHER, 1997. ISBN 9788521208013. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=AtRCvgAACAAJ>>.

SILVA, C. C. *Da força ao tensor: Evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético.* Campinas: UNICAMP, Instituto de Física Gleb Wataghin, 2002.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear e Geometria Analítica.* Porto Alegre: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1987.

VAZ JUNIOR, J. A. *Álgebra geométrica do espaço euclideo e a teoria de pauli.* Departamento de Matemática Aplicada, Campinas, 1996.

VAZ JUNIOR, J. A. *Álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade.* Departamento de Matemática Aplicada, Campinas, 1999.