



PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Kaua Estevam Cardoso de Freitas

**Investigação em livros-texto sobre as estruturas matemáticas presente em
conceitos de física:Um ensaio sobre os livros dos autores David Halliday e
Moysés Nussenzveig**

Caraguatatuba - SP
2022

KAUA ESTEVAM CARDOSO DE FREITAS

Investigação em livros-texto sobre as estruturas matemáticas presente em conceitos de física

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, como requisito para a obtenção do título de graduado em licenciatura em física

Orientador: Prof^o. Me. Rafael Nogueira Luz

Caraguatatuba - SP
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Serviço de Biblioteca e Documentação do IFSP Câmpus Caraguatatuba

Freitas, Kaua Estevam Cardoso de

F866i Investigação em livros-texto sobre as estruturas matemáticas presentes em conceitos de física: um ensaio sobre os livros dos autores David Halliday e Moysés Nussenzveig. / Kaua Estevam Cardoso de Freitas. -- Caraguatatuba, 2022.
90 f. : il.

Orientador: Prof. Me. Rafael Nogueira Luz.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) --
Instituto Federal de São Paulo, Caraguatatuba, 2022.

1. Física. 2. Ensino de Física. 3. Ciclos de modelagem matemática. 4. Formas simbólicas. 5. Física-matemática. I. Luz, Rafael Nogueira, orient. II. Instituto Federal de São Paulo. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por Elis Regina Alves dos Santos
Bibliotecária - CRB 8/8099



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CÂMPUS CARAGUATATUBA
FUC COORD CURSO SUP LICENC MATEMATICA**

OFÍCIO N.º 54/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

Nome: FREITAS, KAUA ESTEVAM CARDOSO DE

Título: Investigação em livros-texto sobre as estruturas matemáticas presente em conceitos de física: Um ensaio sobre os livros dos autores David Halliday e Moysés Nussenzveig

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado de São Paulo, câmpu Caraguatatuba para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Física.

Aprovado em: 10, Fevereiro de 2022

Banca Examinadora

Prof(a). Rafael Nogueira Luz

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). Alex Lino

Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Prof(a). Jurandi Leão Santos

Instituto Federal de São Paulo – Câmpus Caraguatatuba

Julgamento: Aprovado

Documento assinado eletronicamente por:

- **Rafael Nogueira Luz**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 14/02/2022 18:12:56.
- **Alex Lino**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 15/02/2022 16:02:48.
- **Jurandi Leao Santos**, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 17/02/2022 18:07:25.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 14/02/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 296477

Código de Autenticação: de73de55af



OFÍCIO N.º 54/2022 - CMAT-CAR/DAE-CAR/DRG/CAR/IFSP

AVENIDA BAHIA, 1739, INDAIÁ, CARAGUATATUBA / SP, CEP 11665-071

Com todo carinho...

Dedico este trabalho aos meus avós - Florisvaldo (*in memorian*), Rosália (*in memorian*) e Aurelina (*in memorian*)-, aos meus pais - Rosângela e Reginaldo -, aos meus irmãos - Raul, Victor e Kaique -, cunhadxs - Suellen, Letícia e Paulo -, meus sobrinhx - Yasmin, Flávio e Lucas - a minha madrinha Nice, minhas tias e tios, a minha namorada Maria Gabriela e sua família - José Cláudio, Jovina e Sérgio -. Meus resultados são frutos da confiança e incentivos de todos vocês, muito obrigado!

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador Rafael Nogueira por ter sido um importante pilar para o desenvolvimento desta pesquisa. Em todas conversas que tivemos sempre recebi muita confiança, motivação e sábias orientações que me possibilitaram desenvolver este trabalho. Obrigado, professor Rafa, aprendi muito com o senhor!

Quero agradecer a todos os professores que tive no IFSP-Car, “Se vi mais longe foi por estar sobre os ombros de gigantes”. É muito importante eu lembrar alguns nomes agora; Professores Tiago e Jurandir - considero os senhores grandes heróis, pois o curso não foi fácil (em vários sentidos), pensei em desistir várias vezes e nos momentos mais complicados, foi conversando com vocês (ou lembrando de nossas conversas) que não sai do curso, vocês são muito importantes, me ensinaram muito além da física -, Prof. Alex - o qual me inspiro em sua inteligência, dedicação e esforço, gostaria de ter feito pesquisas com o senhor, mas já sou muito grato por ter sido seu orientado no Pibid, aprendo muito com o senhor -, Prof. Aleandro - por sempre me motivar com elogios e discussões que me levaram a interessantes abordagens sobre problemas da física -, Prof. Luís Fernando - suas "broncas" me fizeram refletir e me motivaram a querer melhorar, principalmente, na matemática, que é o estudo deste trabalho -, Prof. Plaza - mostrou que para algumas coisas "o feito é melhor que perfeito", as bolsas que consegui com o senhor me ajudaram muito financeiramente - e as Professoras Natália, Patrícia e Regina - saibam que eu desejava me transferir para a capital de São Paulo, pois além da minha família morar lá, eu queria fazer bacharel, entretanto continuei na licenciatura e agradeço muito as senhoras por isto, eu me encontrei como pessoa no que faço hoje, vocês colaboraram muito no meu crescimento acadêmico e pessoal, muito obrigado mesmo -.

Também agradeço aos meus amigos de Caraguatatuba, os quais considero uma família. Nas repúblicas em que morei, agradeço ao Bonfá, Fabão, Gabriel (professor), Joãozinho, João Pereira, Lara, Luquinhas e Manu pelas boas lembranças e a paciência que tiveram comigo. E aos meus melhores amigos, que espero levá-los pra toda vida, os quais encontrei na turma de física; Brock, Jéssica, Lara, Nicolas, Rodrigo, Sorensen e Zé.

Por fim, mas não menos importante, meus agradecimentos finais vão para toda a minha família. Agradeço muito todas as minhas tias e tios, primos e primas, os quais não foram mencionados na dedicatória, mas que também sou muito grato e quero orgulhá-los, muito obrigado. Enalteço, mais uma vez, meus pais, gostaria de lembrar que sou a flecha do arco de vocês e como prometido vou chegar longe, por vocês! Agradecer minha madrinha Nice, que sempre me ajudou incondicionalmente, eu não tenho palavras para demonstrar o carinho que tenho pela senhora. E também a minha namorada (que logo será mais que minha namorada), bem como sua família (que também considero minha), por todo apoio e bons momentos que construímos.

Quando eu Flor,
quando tu Flores
e ela Flor.
Nós Flores seremos
e o mundo Florescerá

*Adaptação do poema de: **Lena Casagrande***

RESUMO

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi feita uma pesquisa, de cunho qualitativo, nas obras dos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) e [Nussenzveig \(2013\)](#), quanto à possibilidade de existir diferenças na estruturação matemática dos conceitos físicos nos respectivos livros-texto. Na comparação das bibliografias investigadas, foi possível reconhecer e apontar tais distinções entre as respectivas obras fazendo uso dos ciclos de modelagem matemática proposto pela autora [Ferri \(2006\)](#). Foram identificados as diferenças em estilos de pensamento matemático, em que Halliday opta por um caráter mais analítico, empregando a resoluções de cálculos numéricos para a obtenção de resultados numéricos, enquanto Nussenzveig adota um estilo conceitual, externalizando as ideias referente ao fenômeno em questão, entregando ao leitor a conceitualização e o resultado matemático, mas sem apresentar os cálculos feitos para chegar na equação em questão. Quanto às formas simbólicas empregadas pelos autores nas equações, foram identificados semelhanças, sendo a principal o fato dos dois autores ter empregado em 1/4 de suas demonstrações formas simbólicas que representam relações de proporcionalidade direta entre grandezas físicas. As rotas de matematização apontaram que ambos autores não chegaram a realizar o processo de validação dos conceitos físicos, visto que em ambas as obras não existiram propostas de prática experimentais ou debates para levar o estudante a associar e comprovar os conceitos construídos com o meio em que vive.

Palavras-chave: Ensino de Física; Ciclos de Modelagem Matemática; Estilos de Pensamento Matemático; Formas Simbólicas; Física-Matemática.

ABSTRACT

In this Final Course Assignment (FCA), a qualitative research was carried out in the works of the authors Halliday, Resnick and Walker (2016) and Nussenzveig (2013), regarding the possibility of differences in the mathematical structuring of basic concepts in books. - text. In comparing the investigated bibliographies, it was possible to recognize and point out such distinctions among the best works using the mathematical modeling cycles proposed by the author Ferri (2006). Differences in styles of mathematical thinking were identified, in which Halliday opts for a more analytical character, employing a resolution of numerical calculations to obtain numerical results, while Nussenzveig adopts a conceptual style, externalizing as ideas regarding the issue in question, giving the reader the conceptualization and the mathematical result phenomenon, but without presenting the calculations made to arrive at the equation in question. As for the symbolic forms used by the authors in the equations, similarities were identified, the main one being the fact that the two authors have made, in 1/4 of their demonstrations, symbolic forms that represent relations of direct proportionality between physical quantities. And the mathematization routes showed that both authors did not carry out the validation process of physical concepts, since in both works there were no proposals for experimental practice or debates to lead the student to associate and prove the concepts built with the environment in which they live.

Key-words: Physics Teaching; Mathematical Modeling Cycles; Mathematical Thinking Styles; symbolic forms; Physics-Mathematical.

LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 – Ciclo de modelagem baseado em Ferri	23
Figura 6.1 – Vetores velocidade e aceleração	28
Figura 6.2 – Partícula p em movimento MCU	28
Figura 6.3 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta feita por Halliday, Resnick e Walker (2016)	33
Figura 6.4 – Diagrama de movimento de um corpo rígido	34
Figura 6.5 – Diagrama de posição angular	34
Figura 6.6 – Diagrama de velocidade angular	34
Figura 6.7 – Rota de matematização do conceito de velocidade angular feita por Halliday, Resnick e Walker (2016)	37
Figura 6.8 – Direção da velocidade linear	38
Figura 6.9 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares feita por Halliday, Resnick e Walker (2016)	42
Figura 6.10 – Movimento circular	43
Figura 6.11 – Velocidade instantânea	43
Figura 6.12 – Rota de matematização do conceito de velocidade angular feita por Nussenzweig (2013)	48
Figura 6.13 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta (pelo método do hodógrafo) feita por Nussenzweig (2013)	50
Figura 6.14 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta (por incre- mento de velocidade) feita por Nussenzweig (2013)	53
Figura A.1 – Vetores velocidade e aceleração no MCU	62
Figura A.2 – Partícula p em movimento MCU	63
Figura A.3 – Reta tangente a trajetória	64
Figura A.4 – Diagrama de movimento de um corpo rígido	68
Figura A.5 – Diagrama de posição angular	69
Figura A.6 – Diagrama de velocidade angular	70
Figura A.7 – Direção da velocidade linear	74
Figura A.8 – Vista superior do brinquedo com um passageiro pronto e as componentes radial e tangencial do vetor aceleração	76
Figura B.1 – Movimento Circular	79
Figura B.2 – Velocidade Instantânea	80
Figura B.3 – Hodógrafo de um MCU	83
Figura B.4 – Incremento de velocidade	85

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	8
1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Estrutura do trabalho	12
1.2 A física e a matemática - duas faces diferentes da mesma moeda	13
1.3 Um breve contexto de momentos históricos da estruturação matemática da física	14
2 JUSTIFICATIVA	17
2.1 Contextualização da matematização sob a perspectiva de professores relacionada em trabalhos acadêmicos	17
2.2 A importância da matemática para a física e seu respectivo ensino	18
3 OBJETIVOS	19
3.1 Definição do problema	19
3.1.1 Pergunta da pesquisa:	19
3.1.2 Objetivo geral	19
3.1.3 Objetivos específicos	19
4 METODOLOGIA	20
5 FUNDAMENTAÇÃO	22
5.1 Conceitos gerais sobre ciclos de modelagem matemática	22
5.1.1 Ciclo de modelagem aplicado nesta investigação	22
5.1.2 Descrição das fases de modelagem	23
5.1.3 Descrição dos estágios de transições entre as fases de modelagem	24
6 ANÁLISES E DISCUSSÕES	28
6.1 Resultados da análise da demonstração segundo David Halliday	28
6.1.1 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear (1º e 2º Estágio)	28
6.1.2 Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear (3º e 4º Estágio)	29
6.1.3 Rota de matematização	32
6.1.4 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de velocidade angular (1º e 2º Estágio)	33
6.1.5 Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de velocidade angular (3º e 4º Estágio)	34
6.1.6 Rota de matematização	37

6.1.7	Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares (1º e 2º Estágio)	38
6.1.8	Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares (3º e 4º Estágio)	39
6.1.9	Rota de matematização	42
6.2	Resultados da análise da demonstração segundo Moysés Nussenzveig	43
6.2.1	Estilo de pensamento matemático para demonstração da velocidade angular (1º e 2º estágio)	43
6.2.2	Formas simbólicas utilizadas na demonstração da velocidade angular (3º e 4º estágio)	44
6.2.3	Rota de matematização para demonstração da velocidade angular	47
6.2.4	Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo (1º e 2º estágio)	48
6.2.5	Formas simbólicas utilizadas na demonstração de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo (3º e 4º estágio)	48
6.2.6	Rota de matematização para demonstração de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo	50
6.2.7	Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade (1º e 2º estágio)	50
6.2.8	Formas simbólicas utilizadas na demonstração de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade (3º e 4º estágio)	51
6.2.9	Rota de matematização para demonstração de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade	52
6.3	Comparação dos resultados das estruturas matemáticas presentes em ambas as obras	53
6.3.1	Comparação de estilos de pensamento matemático	53
6.3.2	Comparação de formas simbólicas	54
6.3.3	Comparação das rotas de matematização	55
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	Referências	60
	APÊNDICE A Análise da demonstração de aceleração centrípeta segundo David Halliday	62
	APÊNDICE B Análise da demonstração de aceleração centrípeta segundo Moysés Nussenzveig	79

ANEXO A Descrição das formas simbólicas do autor Sherin	87
--	-----------	----

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está estruturado em 7 capítulos, os quais apresentam o tema de pesquisa, contextualizam historicamente a discussão, fundamentam a metodologia de pesquisa empregada, analisam os objetos de estudos, apresentam seus respectivos resultados e por fim, mas não menos importante, projetam perspectivas com novas hipóteses para futuras pesquisas.

No primeiro capítulo é introduzido uma discussão sobre a relação que existe entre a física e a matemática e a contextualização histórica com eventos acerca da matematização da física, alicerçada em autores que defendem a visão de que a matemática deve ser um ente estruturante do pensamento físico e não apenas uma ferramenta de cálculo.

O segundo capítulo discute o estado da arte quanto ao ensino de física, trazendo autores os quais defendem que o tema deve ser tratado com menos reducionismos e opiniões ingênuas relativas a relação entre a física e matemática. Ainda neste capítulo, dissertou-se sobre a importância da matemática tanto para o ensino de física, quanto para o advento científico desta, justificando o trabalho de pesquisa deste TCC.

Quanto ao terceiro capítulo, foi destinado para a formalização e apresentação da pergunta da pesquisa, o objetivo geral e específicos. Sendo eles os direcionadores para as problematizações, bem como as investigações realizadas.

A metodologia de pesquisa foi explicitada no quarto capítulo, relatando os meios utilizados para chegar até os trabalhos que serviram como fontes, o autor que alicerçou a pesquisa quanto aos critérios de análise, as comparações das obras desenvolvidas, os resultados obtidos e a caracterização do tipo desta pesquisa.

O quinto capítulo refere-se a discussão dos ciclos de modelagem matemática, o qual foi escolhido para ser utilizado como o principal critério de análise deste trabalho, exprimindo as fases e estágio que ocorrem neste respectivo processo de modelagem.

No sexto capítulo foi apresentado a análise dos livros-texto dos autores Halliday e Nussenzveig, que levou em consideração os critérios adotados a partir do ciclo de modelagem matemática, a comparação das obras e os resultados obtidos desta.

Já o sétimo e último capítulo traz as considerações finais quanto ao trabalho de investigação e aos resultados alcançados por esta, bem como novas perspectivas de futuras pesquisas a serem realizadas dentro do tema trabalhado.

1.2 A FÍSICA E A MATEMÁTICA - DUAS FACES DIFERENTES DA MESMA MOEDA

Ao indagarmos se a física e a matemática são dois campos limítrofes dentro da ciência, podemos notar a partir dos aspectos históricos relativos a matematização da física, que, na verdade, elas penetram-se mutuamente com uma relação de interdependências entre elas, promovendo um profícuo desenvolvimento de ambas. Isto se torna ainda mais evidente dentro da física moderna e contemporânea, onde se têm diversos signos (símbolos) físicos-matemáticos, que não são possíveis discriminar como partes matemáticas ou não matemáticas, pois suas respectivas semânticas possuem uma mútua e íntima relação (KARAM, 2009).

É importante ressaltar que este trabalho de conclusão de curso se alinha à visão do uso da matemática como estruturante do pensamento físico, a qual se contrapõe à perspectiva da matemática apenas como mera linguagem de descrição ou instrumento de cálculo para obter-se soluções numéricas. Tal concepção é defendida pelo autor Pietrocola (2002), que tem experiência como professor de física tanto no âmbito de ensino médio quanto de nível superior, afirmando que não basta o indivíduo aprendente saber a matemática instrumental (habilidades técnicas de domínio sobre algoritmos, gráficos, regras trigonométricas e entre outros). Para uma boa compreensão e construção do conhecimento da física, é necessário que o estudante utilize a matemática como meio estruturante do seu pensamento físico (habilidades estruturais que correspondem com os processos cognitivos relacionais, capazes de justificar e interpretar a matematização envolvida) (KARAM; PIETROCOLA, 2009).

O autor Tuminaro (2004 apud KARAM, 2012) problematiza se a matemática ensinada em física é igual a matemática ensinada nos curso de matemática, afirmando que a semântica da matemática ensinada em cada área é diferente. Como por exemplo, muitas vezes, no olhar do matemático, um numerador e um denominador indicam um número racional; já para o olhar do físico, o mesmo simboliza uma razão direta ou indiretamente proporcional entre grandezas (TUMINARO, 2004). O matemático (sem considerar a matemática aplicada) busca elaborar um raciocínio abstrato sem ter a necessidade de justificar seu uso, já o físico tem a intenção de utilizar a matemática com interesse em casos específicos, relativos a fenomenologia estudada.

E é neste ponto que reside a problemática desta respectiva pesquisa: investigar nos livros-texto, em específico aqueles que são amplamente utilizados no curso de licenciatura em física do IFSP-Caraguatatuba, qual é a estruturação matemática e como a mesma é aplicada pelos autores no processo de ensino-aprendizagem de conceitos físicos, sendo necessário para isto, uma pesquisa com o intuito de caracterizar critérios de análises de

materiais didáticos a fim de identificar tais estruturações matemáticas presentes nas obras.

1.3 UM BREVE CONTEXTO DE MOMENTOS HISTÓRICOS DA ESTRUTURAÇÃO MATEMÁTICA DA FÍSICA

Para tal reflexão, temos como referência o autor [Vargas \(1996\)](#) que relata um interessante panorama sobre este tema, debatendo desde as ideias da Grécia antiga até a nossa contemporaneidade, tendo como objetivo central apresentar os aspectos importantes relativos a historicidade da matematização da física, os quais alguns destes momentos históricos serão destacados nos parágrafos a seguir.

Inicialmente, façamos uma viagem histórica no tempo retomando o passado, aproximadamente no séc VI a.C., no momento em que originou-se a *Épisteme Theoritike* - uma visão teórica da natureza (*Phýsis*, em grego $\Phi\upsilon\sigma\iota\varsigma$) sobre a realidade do mundo físico -, um processo de leitura de mundo dentro da perspectiva de moldar as ciências da natureza matematizando a mesma [\(VARGAS, 1996\)](#).

Foi Pitágoras (570 - 495 a.C.) quem promoveu a ideia de que tudo aquilo que pertence ao mundo físico é algo permanente e unitário, obedecendo ao princípio de proporções harmoniosas, que são expressas em números, como por exemplo: as relações matemáticas que descrevem a diferença entre sons emitidos por diferentes martelos, quando batem em bigornas, ou os movimentos cíclicos feitos pelos planetas [\(VARGAS, 1996\)](#).

Tais concepções de Pitágoras, aliadas às técnicas egípcias de mensurar medidas de terrenos, utilizando a geometria, inspiraram o filósofo grego Platão (428 - 348 a.C.), que discorreu sobre a natureza em sua obra chamada "Timeu", com o subtítulo de *Peri Physei* ("A respeito da natureza"). Nela, ele defendeu que as combinações dos números que representam a realidade do mundo físico, podem ser distinguidos em quatro elementos: terra, ar, fogo e água. Tais elementos são, respectivamente, oriundos de formas geométricas perfeitas: tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro, conhecidos como os Sólidos de Platão; estes, por sua vez, constituem todas as coisas da natureza [\(VARGAS, 1996\)](#).

Pouco tempo após Platão, Euclides (323-283 a.C.) revolucionaria a maneira como os geômetras desenvolviam os teoremas, deixando de demonstrar as propriedades destes elementos matemáticos através da prática, partindo para conceitos dedutíveis por meio de axiomas (sentenças ou proposições dadas como evidente e verdadeira), construindo a Geometria Axiomática, o que lhe concedeu o título de pai da geometria [\(VARGAS, 1996\)](#).

Apesar disto, Aristóteles (384 - 322 a.C.), que fora discípulo de Platão, não teve a mesma inspiração matemática em seus trabalhos, em seu caso, também organizava de uma

forma lógica suas ideias. Entretanto, seus pensamentos se assemelhavam, de certa maneira, mais com os de Euclides, pois partiam de certos princípios que vão se derivando para chegar em determinadas conclusões (VARGAS, 1996). Seu olhar, quanto à ideia de grandeza física, era qualitativa, feitas por meio de associações de qualidades relacionando-as com o estado do objeto, diferenciando-as pelas suas respectivas intensidades (PATY, 2003 apud KARAM, 2012).

Com a chegada do período Helenístico, que se constituiu da morte de Alexandre o Grande (323 a.C.) até a dominação da península grega pelos romanos (146 a.C.), a matematização da filosofia natural (as origens da física) começou a se aproximar de análises e cálculos da matemática atual, tendo seus precursores como Arquimedes (289-212 a.C.), aplicando métodos matemáticos de exaustão, Aristarco de Samos (310-230 a.C.) e Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), que utilizaram da geometria para estimar os tamanhos e distância entre a Terra, a Lua e o Sol, bem como outros que fizeram uso da matemática para descrever diversos fenômenos físicos (VARGAS, 1996).

Dado um salto no tempo para o século XVI, deparamo-nos com indivíduos que revolucionaram o modo de enxergar e fazer ciência. Um dos pioneiros foi Nicolau Copérnico (1473-1543) que, no ano de sua morte, publicou a obra *De Revolutionibus Orbium Collestium* (do latim: "Das revoluções das esferas celestes"), que através da trigonometria, discutia a reforma do calendário motivado pela revolução do Heliocentrismo (VARGAS, 1996).

Tais ideias copernicanas aliadas as interpretações das observações celestes de Tycho Brahe (1546 - 1601), levaram Johannes Kepler (1571 - 1630) à sua célebre contribuição para a astronomia com três leis que descrevem o movimento de corpos (VARGAS, 1996).

Outro cientista, que também nasceu neste mesmo período Renascentista, foi Galileu Galilei - (1564 - 1642), creditado como pioneiro do critério de veracidade científica para física. Seu processo consistia em supor hipóteses sobre um dado fenômeno físico, organizar estas suposições racionais de forma lógica (por meio de proporcionalidades) e confrontá-las com a experiência (efetuada de maneira que aspectos externos ao fenômeno, com potencial de interferir nos resultados, sejam minimizados ao máximo) (VARGAS, 1996).

Foi graças a criação das técnicas matemáticas do Cálculo Diferencial e Integral, advento creditado a Isaac Newton (1642 - 1727) e a Gottfried W. Leibniz (1642 - 1727), que permitiu que fenômenos físicos obtivessem análises mais complexas. Como por exemplo, as previsões teóricas de James C. Maxwell (1831 - 1879), que a partir das combinações entre as suas quatro equações (lei de Gauss, lei de Gauss para o magnetismo, lei da indução de Faraday e a Lei de Maxwell-Ampère) , obtêm-se que o coeficiente de propagação de uma onda eletromagnética é igual a velocidade da luz e, portanto, as duas são de mesma natureza (VARGAS, 1996).

E, neste último salto no tempo, vamos para o início do século XX, quando ocorreu a

primavera da física moderna. Aqui, Max Planck (1858 - 1947), com sua teoria de radiação por meios de pacotes de energia ("quantas"), deu início à física quântica. Albert Einstein (1879 - 1955), por sua vez, revolucionou a mecânica trazendo as ideias de Relatividade Geral e Restrita, com elegantes equações matemáticas que, tem o potencial de modelar o "tecido" espaço-tempo (VARGAS, 1996).

Existiram inúmeros outros cientistas e contribuições para a ciência que tiveram relações com a matematização, mas não é a intenção aqui deste texto esgotar tais exemplos, mas sim trazer um recorte histórico apresentando um panorama de importantes fatos da relação entre a física e a matemática.

2 JUSTIFICATIVA

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA MATEMATIZAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DE PROFESSORES RELATADA EM TRABALHOS ACADÊMICOS

O ensino de ciências, em especial o de física, enfrentam diversas dificuldades quanto aos processos de ensino-aprendizagem, os quais são evidenciados em muitos trabalhos acadêmicos referente às construções de conhecimento por parte dos estudantes; tanto em relatos de entrevistas com professores, quanto em levantamentos de dados que mostram a prevalência de práticas de ensino tradicionais, de caráter bancário ¹, bem como seus respectivos resultados negativos, sobretudo quando envolve a matematização dos conceitos ministrados (SILVA et al., 2018). Segundo o autor Pietrocola (2002), muitos professores, diante destes resultados negativos, são influenciados a procurarem ou afirmarem que existem problemas onde, possivelmente, eles nem existem, podendo-se considerar, um caso particular disto, a conjuntura de uma parcela considerável de profissionais desta área justificarem que o ensino de física não é profícuo devido ao fato de julgarem que os conhecimentos e competências matemáticas, por parte dos alunos, serem frágeis e insuficientes para abordar os respectivos assuntos trabalhados em sala de aula, desconsiderando que existe uma relação complexa e de caráter limítrofe entre estas disciplinas, a qual muitas vezes é utilizada de maneira inadequada nos processos de ensino de física.

Observando esta problemática sob a luz da autora Concheti (2015), este pensamento de responsabilização matemática do fracasso do ensino de física, tem relação com a forma em que a construção dos conceitos são desenvolvidos. Na maioria das vezes, trabalha-se apenas a resolução de problemas quantitativos, concedendo a este um caráter meramente instrumental, ao invés de ser um ente dentro do processo de ensino-aprendizagem de física capaz de colaborar com a construção relacional e estrutural do conhecimento físico.

Sendo assim, esta pesquisa justifica-se, a priori, com o ato de compreender melhor a intrínseca relação entre a física e a matemática, tanto perante a ciência, quanto o seu respectivo processo de ensino, afastando-nos de opiniões ingênuas, que geralmente são feitas quanto ao fracasso escolar e, conseqüentemente, resulta no combate dos reducionismos relativos a esta problematização.

¹ Educador como principal agente do processo de ensino, sendo responsável por "encher" os educandos de conteúdo (FREIRE, 1997).

2.2 A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA PARA A FÍSICA E SEU RESPECTIVO ENSINO

Neste respectivo trabalho de conclusão de curso, temos como objeto de estudo as estruturas matemáticas que formalizam os conceitos físicos investigados, possibilitando generalizá-los em leis para descrever um dado comportamento fenomenológico, podendo ter sua importância descrita nas seguintes palavras do célebre físico Galileu Galilei;

"A filosofia está escrita neste grande livro que está constantemente lá aberto diante dos olhos (eu digo o universo), mas não pode ser compreendido sem primeiro aprender a compreender a linguagem e conhecer os caracteres em que está escrita. Ele é escrito em linguagem matemática, e os personagens são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível entender humanamente a palavra; sem estes, é inútil vagar por um escuro labirinto" (GALILEI, 2005, p.16).

Ainda sim, acredita ser necessário ressaltar nesta justificativa, o fato inegável de que hoje a matemática está, mais do que nunca, presente nos mais diversos meios científicos e cotidiano de um indivíduo (PIETROCOLA, 2005). Seja no âmbito formal da ciência, por exemplo, em livros e artigos científicos, ou em meios comuns da sociedade, como notícias sobre taxas de transmissibilidade de doenças, eficácias de vacinas, desmatamentos, etc. Esta convivência com a matemática (o uso de funções, equações, gráficos, vetores, inequações, geometria e entre outros) está se tornando cada vez mais comum (PIETROCOLA, 2005, p.484).

Dito isto, são estes os argumentos utilizados para justificar a respectiva investigação a ser feita neste trabalho que acredita na hipótese de que não é possível aprender os conceitos físicos sem estarem alicerçados por uma estrutura matemática relacional que estimule e proporcione o pensamento lógico, crítico e reflexivo dos fenômenos, diferente da, geralmente assumida, matemática instrumental como apenas uma ferramenta voltada para solucionar problemas quantitativos.

3 OBJETIVOS

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

3.1.1 Pergunta da pesquisa:

Quais são as diferenças de estruturação matemática dos conceitos físicos presentes nos livros textos de física do autor americano David Halliday e do autor brasileiro Herch Moysés Nussenzveig?

3.1.2 Objetivo geral

Objetivo geral:

- Com relação ao conceito físico de aceleração centrípeta, analisar as questões acerca da estruturação matemática dos conceitos físicos nos livros dos respectivos autores D. Halliday e Moysés Nussenzveig.

3.1.3 Objetivos específicos

- Identificar e caracterizar critérios de análise de materiais didáticos de física com relação a aspectos de estruturação matemática de conceitos físicos.
- Analisar e comparar os livros com relação aos critérios descritos.

4 METODOLOGIA

A metodologia empregada neste trabalho de conclusão de curso está debruçada na perspectiva do autor [Fontelles et al. \(2009\)](#) que apresenta, de modo sucinto, diretrizes sobre a estruturação de uma pesquisa científica, bem como exprime as possíveis metodologias que podem ser aplicadas.

A priori, após ocorrer discussões iniciais entre o orientado e orientador deste respectivo TCC, ficou compreendido por parte destes que ambos tinham interesse no tema de pesquisa quanto às relações da física com a matemática. Dentro destas mesmas discussões iniciais, foi debatido a hipótese de existir diferentes predileções de livros-textos entre os professores universitários de física do IFSP-Caraguatatuba, tal possibilidade foi levantada pois, notou-se por experiência dos autores deste TCC, que existem dois grupos de professores: os que utilizam a obra do autor Halliday e aqueles que usam a do Nussenzveig. Desta forma, estabeleceu-se o intento de conhecer a diferença de estilo das estruturas matemáticas presente nestes dois livros de física que são amplamente utilizados nos cursos de licenciatura em física do IFSP-Caraguatatuba.

Com o propósito de se aprofundar no tema de pesquisa, de maneira a conhecer quem já escreveu sobre o assunto e o que já foi publicado, fora realizado uma revisão bibliográfica em duas plataformas de pesquisa: [1] Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o [2] *Google Scholar*, sendo utilizadas as palavras chaves: "relação entre matemática e física" e "estruturação matemática da física". A tese do autor [Karam \(2012\)](#) foi um dos resultados obtidos nesta investigação dentro destas plataformas, o qual por sua vez, foi uma das principais referências para a fundamentação deste TCC, visto que, a partir da apreciação feita de seu trabalho, foi possível vislumbrar direções para encontrar outros autores que colaborassem com os critérios utilizados na análise e comparação dos livros-textos realizadas na pesquisa deste trabalho.

Após efetuada a revisão bibliográfica, mencionada anteriormente, bem como sua aplicação na fundamentação desta pesquisa, foi realizado uma comparação nos livros-textos dos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) e [Nussenzveig \(2013\)](#), com relação as estruturas matemáticas, levando-se em consideração os aspectos dos ciclos de modelagem matemática levantados na fundamentação para serem aplicados como ferramenta de análise.

O conceito de aceleração centrípeta foi escolhido, pois enxergamos um potencial para análise da estruturação matemática, visto que existem demonstrações detalhadas a respeito do respectivo conteúdo, se mostrando um bom objeto para estudo desta pesquisa.

Por fim, mas não menos importante, depois de efetuada a comparação entre as obras, o resultado foi sintetizado e apresentado na conclusão.

Sendo assim, este TCC se qualifica como uma pesquisa básica, que busca colaborar com o desenvolvimento de novos conhecimentos e sua natureza é do tipo observacional, pois o pesquisador atua apenas como um leitor dos textos presentes nas obras sem interferir no objeto de estudo. A abordagem das análises e comparações foram qualitativas e os procedimentos basearam-se em pesquisa bibliográfica e documental.

5 FUNDAMENTAÇÃO

5.1 CONCEITOS GERAIS SOBRE CICLOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dado que o objetivo deste trabalho é investigar o processo de estruturação matemática do conceito de aceleração centrípeta empregado em dois livros-texto de física, optamos por fazer esta análise sob a perspectiva da matemática como estruturante do pensamento físico baseada no ciclo de modelagem matemática que cada obra apresenta.

O autor [D'Ambrosio \(2009\)](#) discute a modelagem matemática problematizando seus respectivos aspectos cognitivos, pedagógicos, históricos e políticos, indicando que a ciência, dentro de uma perspectiva histórica, tem se desenvolvido como resultado do aprimoramento de teorias que se fundamentam em modelos da realidade, as quais são consequências diretas do advento de conhecimento e novas tecnologias.

A fim de apresentar uma breve definição sobre o conceito de modelagem, relatamos para apreciação a seguinte elucidação:

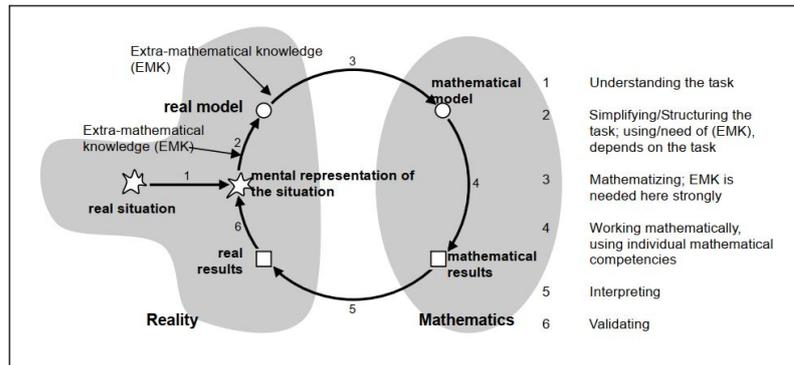
"modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" ([BASSANEZI, 2002](#), p.24).

5.1.1 Ciclo de modelagem aplicado nesta investigação

Os processos existentes dentro da modelagem matemática, utilizados para a análise da investigação nas obras de D. Halliday e M. Nussenzveig, foram fundamentadas a partir das ideias contidas no trabalho da autora [Ferri \(2006\)](#), a qual realizou uma investigação empírica de carácter qualitativo. Contou com uma amostra de 65 alunos e 3 professores, em que os dados foram levantados por meio de questionários e análises de três aulas gravadas integralmente. Um dos seus resultados foi a adaptação do ciclo de modelagem dos autores [Blum e Leiss \(2005\)](#) apresentado na Figura [5.1](#).

Este ciclo de modelagem é um processo que possui 6 fases, onde os indivíduos, ao modelarem uma situação física, têm a possibilidade de passar por todas elas, ou então passar somente por algumas fases, bem como também passar por mais de uma fase diversas vezes, isto irá depender da rota que o sujeito seguir, a qual é feita a partir do nível de

Figura 5.1 – Ciclo de modelagem baseado em Ferri



Fonte: Ferri (2006, p.92)

consciência ou inconsciência à respeito do conhecimento em questão (SILVA, 2013). A seguir será feita uma breve descrição das fases baseadas no trabalho de Ferri (2006).

5.1.2 Descrição das fases de modelagem

1ª Fase: *Real Situation* (Situação Real [SR])

Trata-se da conjuntura fenomenológica "observada" pelo indivíduo, sendo que este processo pode ser feito mediante análises de uma cena/imagem, leituras de textos, ou então, de ambas as formas. Nesta fase, o indivíduo, geralmente, compreende em um nível implícito e inconsciente (por exemplo, ao atravessarmos uma rua e observarmos um carro vindo em nossa direção, não fazemos os cálculos de velocidade para saber se iremos conseguir atravessar sem que o carro nos atropеле; inferimos as possibilidades desta situação de maneira inconscientemente). Cabe ressaltar que, caso o sujeito não consiga compreender bem o problema da situação nesta fase, ainda é possível continuar o processo de modelagem, visto que em outras fases também é possível conjecturar o conceito a partir de simplificações e estruturações à respeito das informações relativas ao fenômeno estudado.

2ª Fase: *Mental Representation of the Situation* (Representação Mental da Situação [RMS])

Esta é uma fase que pode diferir muito em relação a maneira adotada por diferentes indivíduos ao organizar as ideias, pois o *Extra-Mathematical Knowledge* [EMK] (Conhecimentos Extra-Matemáticos [CEM]), compreendido como informações que não estão explícitas nas leis matemáticas, ou são oriundas de experiências externas ao conceito em questão, como por exemplo: constantes físicas ou valores de medidas que são utilizados na elaboração do pensamento (FERRI, 2007), podem influenciar na maneira de abstrair e

organizar as ideias. A construção da RMS é, basicamente, a descrição geral que o indivíduo faz sobre o fenômeno em questão.

3ª Fase: *Real Model* (Modelo Real [MR])

O Modelo Real trata-se do levantamento e simplificação das informações à respeito do fenômeno, bem como a organização e estruturação destas por meio de esboços pictóricos ou equações que se relacionem com o fenômeno. Nesta fase, o indivíduo torna-se mais consciente do processo, visto que ele precisa tomar decisões na filtragem de informações que são influenciadas por seu Estilo de Pensamento.

4ª Fase: *Mathematical Model* (Modelo Matemático [MM])

Esta é a fase em que será efetuada a transição do mundo físico (real) para o matemático (abstrato). Devido a este fato, as argumentações sobre o fenômeno irão se apresentar com uma maior número de símbolos e estruturas matemáticas. Nesta fase da modelagem, o pensamento se dará por meio de operacionalizações matemáticas e cálculos.

5ª Fase: *Mathematical Results* (Resultados Matemáticos [RM])

Após a efetuação da operacionalização matemática e dos seus respectivos cálculos, são obtidos resultados numéricos, geralmente, associados à grandezas físicas, que correspondem às variáveis relacionadas ao fenômeno físico em questão, sendo esta a última fase relativa ao mundo matemático (abstrato) do ciclo de modelagem.

6ª Fase: *Real Results* (Resultados Reais [RR])

Nesta fase ocorre o confronto efetuado pelo indivíduo entre os resultados obtidos do seu processo de solução do problema com a realidade a qual vive. Em outras palavras, o sujeito, após interpretar a solução obtida, estabelece uma relação entre o mundo físico e o matemático, sendo assim efetua o processo de validação dos resultados obtidos através de sua solução com suas respectivas experiências e associações.

5.1.3 Descrição dos estágios de transições entre as fases de modelagem

As principais contribuições feitas por [Ferri \(2006\)](#) na adaptação do ciclo de modelagem, que diferem do trabalho de [Blum e Leiss \(2005\)](#), foram as discriminações dos processos, os quais são denominados de estágios que, por sua vez, ocorrem na transição

entre as fases. Para a caracterização destes, foram utilizados trabalhos de outros autores que correspondem a cada respectivo estágio:

1º Estágio: *Understanding the task* (Compreensão da tarefa) e 2º Estágio: *Simplifying/Structuring the task* (Simplificando/Estruturando a tarefa)

Estes dois estágios compreendem a transição entre a 1ª Fase (SR) para a 2ª Fase (RMS), momento em que o indivíduo, após observar a conjuntura da fenomenologia em questão, cria um enredo para descrever a situação do problema, uma espécie de apresentação pessoal de toda a sua percepção do contexto dos conceitos envolvidos. E a transição da 2ª Fase (RMS) para a 3ª Fase (MR), onde são feitas as simplificações necessárias e as informações, são organizadas de maneira lógica. O sujeito atribui descrições por meio de esboços de desenhos, conceitos físicos e equações, em que ele suspeita que existam relações com o conceito fenomenológico ou ambas as formas simultaneamente.

Tais processos são estudados pela autora [Ferri \(2012\)](#) que afirma não ser comum a homogeneidade dos resultados de aprendizagem, pois existem nos grupos de estudantes uma parcela considerável de indivíduos que possuem uma boa compreensão e outros sujeitos que têm maiores dificuldades, sobretudo, quando envolvem a matematização. Uma possível justificativa, segundo a mesma autora, é que alguns indivíduos aprendentes optam por um caminho diferente do que foi proposto pelo professor.

Para explicar estas respectivas preferências, trazemos uma abordagem baseada na teoria do autor [Sternberg \(1999\)](#) apud [FERRI, 2012](#), que discute os estilos de pensamento matemático. Este conceito tem o intuito de exprimir estes tipos de escolhas que os sujeitos fazem para compreender e apresentar suas construções de ideais à respeito de um fenômeno ou conceito.

Segundo essa teoria, existem três tipos de Estilos de Pensamento Matemático:

1. Pensadores de Estilo Visual: indivíduos que apresentam preferências pela internalização e externalização (compreensão e apresentação) da construção dos conhecimentos por meio de representações de figuras e esboços do fenômeno em questão.
2. Pensadores de Estilo Analítico: aqueles que fazem uso de símbolos matemáticos para formalizarem suas internalizações e externalizações referente à construção do conhecimento.
3. Pensadores de Estilo Integrado: os sujeitos que combinam ambos os Estilos de Pensamento Visual e Analítico.

Sendo assim, para a análise destes dois estágios, se faz necessário uma investigação dos argumentos em relação à maneira como é internalizada ou externalizada, verificando-se

quais maneiras (uso de figuras, equações ou ambos) foram utilizadas para a construção do conhecimento.

3º Estágio: *Mathematizing* (Matematização) e 4º Estágio: *Working mathematically* (Operacionalizações matemáticas)

O terceiro estágio é o momento de transição da terceira fase (MR) para a quarta (MM), compreendendo-se a transposição da organização lógica a respeito do fenômeno, feita até o momento por meio da língua corrente e esboços pictóricos para agora, uma descrição formalizada por símbolos matemáticos. Quanto à análise deste estágio, as formas simbólicas propostas pelo autor Sherin (2001) servirão como mecanismo para compreender o "vocabulário matemático" empregado pelos autores para externalizar a construção de conhecimento relativos ao fenômeno em questão.

Tabela 5.1 – Formas Simbólicas propostas por Sherin (2001, p.506)

Grupo	Forma Simbólica	Padrão de Símbolo
Termos Concorrentes	Termos Concorrentes	$\square \pm \square \pm \square \dots$
	Oposição	$\square - \square$
	Balanceamento	$\square = \square$
	Cancelamento (a)	$0 = \square - \square$
Proporcionalidade	Prop+	$\left[\begin{array}{c} \dots x \dots \\ \dots \end{array} \right]$
	Prop-	$\left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots x \dots \end{array} \right]$
	Razão	$\left[\frac{x}{y} \right]$
	Cancelamento (b)	$\left[\begin{array}{c} \dots x \dots \\ \dots x \dots \end{array} \right]$
Termos que são Conjuntos de Valores	Partes de um Todo	$[\square + \square + \square \dots]$
	Base \pm Mudança	$[\square \pm \Delta]$
	Parte de um Todo	$\left[\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right]$
	Mesma Quantidade	$\square = \square$
Dependências	Dependência	$[\dots x \dots]$
	Sem Dependência	$[\dots]$
	Dependência Única	$[\dots x \dots]^*$
Coeficientes	Coeficiente	$[x \square]$
	Coeficiente de Escala	$[n \square]$
Multiplicação	Intensivo-Extensivo	$x \cdot y$
	Extensivo-Extensivo	$y \cdot y$
Outras Formas	Identidade	$x = \dots$
	Dying Away	$[e^{-x \dots}]$

Ao final desta transposição, será efetuado a transição da quarta fase (MM) para a

quinta (RM), momento que ocorre as operacionalizações matemáticas, obtendo-se destas um resultado, o qual será discriminado como resultados matemáticos.

5º Estágio: *Interpreting* (Interpretação)

Neste estágio ocorre a transição entre a quinta fase (RM) e a sexta (RR), onde os indivíduos interpretam os valores numéricos calculados pelas operacionalizações matemáticas, relacionando tais números com sentidos físicos, bem como a relação entre as grandezas, sendo que este processo pode ser feito de duas formas diferentes: a partir da Compreensão Relacional ou da Compreensão Instrumental.

Skemp (1976) discute as diferenças entre a compreensão relacional e instrumental, afirmando que quando um indivíduo apenas memoriza regras e aplica estas sem saber explicar e justificá-las como funcionam, ele está fazendo uso da Compreensão Instrumental, empregando a matemática apenas como uma ferramenta descritiva e ou de cálculo. Já se este sujeito consegue exprimir a validade das equações de maneira a estruturar seu pensamento a partir de proposições lógicas, ele faz uso da Compreensão Relacional.

6º Estágio: *Validating* (Validação)

No sexto estágio, correspondente a transição entre a sexta fase (RR) de volta para a fase (RMS), ocorre a validação das soluções encontradas. Tal processo é composto por dois momentos: uma mais consciente com a validação baseada em conhecimento (aceitação dos resultados com base em seus conhecimentos, sejam CEM ou não) e outra maneira, mais inconsciente, baseada em uma validação intuitiva (onde o sujeito percebe que os resultados podem ou não estarem certos, isto porque eles não estão de acordo com as associações de suas experiências, entretanto, diferentemente da validação mais consciente, ele não consegue explicar tais razões para estas suas validações).

6 ANÁLISES E DISCUSSÕES

A análise das estruturas matemáticas presentes nos livros-textos quanto à construção do conceito de aceleração centrípeta, foram feitas sob um caráter qualitativo, levando-se em conta os estilos de pensamento matemáticos adotados pelos autores, as Formas Simbólicas empregadas e a rota de matematização tomada por eles.

A seguir é apresentado uma síntese dos resultados obtidos quanto às estruturas matemáticas levantados nas duas obras. Para a apreciação de uma descrição com maiores detalhes sobre a análise, indicamos que seja feita a leitura do apêndice A e apêndice B.

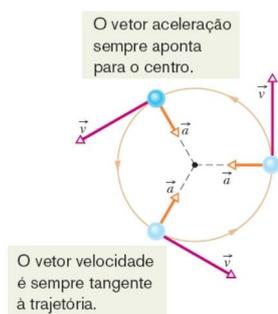
6.1 RESULTADOS DA ANÁLISE DA DEMONSTRAÇÃO SEGUNDO DAVID HALLIDAY

6.1.1 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear (1º e 2º Estágio)

Os autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) fizeram uso de dois estilos de pensamento matemático.

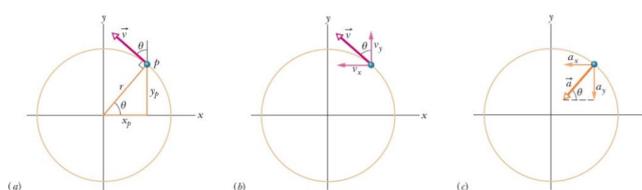
Na primeira (SR), segunda (RMS) e terceira fase (MR) eles optaram pelo Estilo Visual, onde idealizaram uma situação hipotética para descrever o fenômeno em questão. Para tal, utilizaram-se das Figuras [A.1](#) e [A.2](#).

Figura 6.1 – Vetores velocidade e aceleração



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.191

Figura 6.2 – Partícula p em movimento MCU



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.193

Estas, por sua vez, tinham como objetivo externalizar a ideia de um corpo, descrevendo um movimento circular uniforme com velocidade escalar constante, entretanto sob a ação de uma aceleração (centrípeta) que modifica, ao longo de sua trajetória, a direção vetorial desta velocidade.

Posteriormente, quando os autores encontram-se na quarta (MM) e quinta fases (RM), eles adotam, a partir de então, o estilo de pensamento matemático do tipo Integrado, onde seus argumentos quanto ao conceito de aceleração centrípeta foram externalizados à partir da combinação de análises pictóricas (inferência de informações sobre o conceito por meio da figura) e a aplicação e operacionalização de símbolos matemáticos.

6.1.2 Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear (3º e 4º Estágio)

Os autores introduziram equações ao apresentarem os resultados matemáticos da respectiva demonstração, sendo elas as equações [A.1](#) e [A.2](#). Já as equações [A.3](#), [A.4](#) e [A.5](#), foram apresentadas na transição da terceira (MR) para a quarta fase (MM), sendo utilizadas com o intuito de descrever o vetor velocidade instantânea da partícula. Na transição da quarta (MM) para a quinta fase (RM), foram efetuadas operações matemáticas, sendo as equações [A.6](#) e [A.7](#), resultados da derivada da velocidade instantânea descrita anteriormente e as equações [A.8](#) e [A.9](#), conceitos geométricos evocados para serem aplicados na equação [A.7](#), a fim de encontrar-se as equações [A.10](#) e [A.11](#), que são os resultados matemáticos da quinta fase (RM).

Tabela 6.1 – Equações utilizadas por Halliday para demonstração da equação de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. A.1	$a = \frac{v^2}{r}$	Prop+ Prop-
Eq. A.2	$T = \frac{2\pi r}{v}$	Prop+ Prop- Coeficiente Coeficiente de escala
Eq. A.3	$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$	Partes de um todo
Eq. A.4	$\vec{v} = (-v \cdot \text{sen}\theta)\hat{i} + (v \cdot \text{cos}\theta)\hat{j}$	Coeficiente de escala Partes de um todo

continua

conclusão		
Equação		Formas simbólicas aplicadas
Eq. A.5	$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{j}$	Coefficiente de escala Partes de um todo
Eq. A.6	$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{j}$	Coefficiente de escala Partes de um todo
Eq. A.7	$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{j}$	Coefficiente de escala Partes de um todo
Eq. A.8	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$	Balanceamento Partes de um todo
Eq. A.9	$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$	Mesma quantidade
Eq. A.10	$a = \frac{v^2}{r}$	Prop+ Prop-
Eq. A.11	$\tan\phi = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta$	Cancelamento (b) Mesma quantidade
Eq. A.12	$a = \frac{2\pi v}{T}$	Prop+ Prop-

Fonte: Próprio Autor

Na tabela [6.1](#) foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração do conceito de aceleração centrípeta, bem como as suas respectivas associações entre as variáveis e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

A equação [A.1](#) refere-se ao conceito de aceleração centrípeta (a), que pode ser descrito como a razão do quadrado da velocidade (v^2) de uma partícula ao realizar uma trajetória circular de raio (r). Neste caso, a forma simbólica Prop+ foi associada para indicar a proporcionalidade direta entre (a) e (v^2), bem como a forma simbólica Prop- associada para indicar a proporcionalidade inversa entre (a) e (r).

A equação [A.2](#) trata do período de revolução (T), descrito pela razão do espaço percorrido no trajeto circular, mais conhecido como o comprimento da circunferência ($2\pi r$), e a velocidade (v) que a partícula possui ao realizar o movimento. A forma simbólica Prop+ foi associada para indicar a proporcionalidade direta entre (T) e ($2\pi r$), bem como a forma simbólica Prop- associada para indicar a proporcionalidade inversa entre (T) e (v), já a forma simbólica Coeficiente foi aplicada para indicar um fator constante (2π) não dotado de unidade, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala para apontar que o termo do raio (r) trata-se de uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.3](#) apresenta o vetor da velocidade instantânea (\vec{v}) de uma partícula fazendo uso da linguagem de cálculo diferencial ($\frac{d}{dt}$). A velocidade instantânea (\vec{v}) é descrita, neste caso, como a soma das componentes vetoriais no eixo cartesiano da abscissa

$(\frac{dx}{dt}\hat{i})$, ordenada $(\frac{dy}{dt}\hat{j})$ e cota $(\frac{dz}{dt}\hat{k})$. A forma simbólica associada foi a Partes de um todo, que indica o processo de soma das parcelas para compor um conjunto que resulta no valor de uma grandeza física.

A equação [A.4](#) é obtida a partir da análise geométrica da figura [6.2](#), que resulta na descrição do vetor velocidade (\vec{v}) como a soma de suas componentes vetoriais no eixo da abcissa $((-v \cdot \text{sen}\theta)\hat{i})$ e ordenada $((v \cdot \text{cos}\theta)\hat{j})$. As variáveis $-\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$ foram auferidas por meio do triângulo retângulo que é composto pelo vetor velocidade \vec{v} (hipotenusa) e as retas traçadas paralelas ao eixo y (cateto adjacente ao ângulo θ) e eixo x (cateto oposto ao ângulo θ). O sinal de negativo aparece no termo $-\text{sen}\theta$, pois a orientação de seu sentido vetorial está apontado para o lado esquerdo em relação a origem do sistema cartesiano. As formas simbólicas utilizadas para esta equação foram a de Coeficiente de escala para a variável de velocidade (v) que tem seu valor inalterado durante todo o tempo decorrido pelo fenômeno e a forma simbólica Parte de um todo, associada a soma das componentes vetoriais que resultam no valor do vetor (\vec{v}).

A equação [A.5](#) representa o vetor velocidade (\vec{v}) em função das componentes do raio (r) da circunferência, para isto foi necessário relacionar as componentes da equação [A.4](#) com o triângulo retângulo da figura [6.2](#), especificamente do triângulo retângulo composto pela reta do raio r (hipotenusa), a componente x_p (cateto adjacente ao ângulo θ) e a componente y_p (cateto oposto ao ângulo θ), aplicando as relações trigonométricas referentes as componentes deste triângulo ($\text{sen}\theta = y_p/r$ na substituição da componente da abcissa (\hat{i}) e $\text{cos}\theta = x_p/r$ na substituição da componente da ordenada (\hat{j})). As formas simbólicas aplicadas nesta equação foram o Coeficiente de escala para o termo da velocidade (v) que tem seu valor inalterado durante todo o tempo decorrido pelo fenômeno e a forma simbólica Parte de um todo, associada a soma das componentes vetoriais que sofreram a substituição para estarem em função do raio (r).

A equação [A.6](#) representa uma operacionalização matemática, em específico a derivada de primeira ordem da taxa de variação de espaço das componentes que estão em função do raio da equação [A.5](#). Nota-se que a velocidade (v) e o raio (r) não estão sendo derivadas, isto porque a razão entre estes dois termos é uma constante, em que foi associado a forma simbólica de Coeficiente de escala. Outra forma simbólica utilizada foi a Partes de um todo, visto que a soma das componentes da abcissa (\hat{i}) e ordenada (\hat{j}) resultam no vetor aceleração (\vec{a}).

A equação [A.7](#) é o resultado da derivada de primeira ordem aplicada na equação anterior, em que as taxas de variação x_p e y_p em função do tempo correspondem as componentes x da velocidade v_x e y da velocidade de v_y . Ainda nesta equação é feita uma substituição, admitindo-se a proposição obtida da equação [A.4](#), dado que $v_x = -v\text{sen}\theta$ e $v_y = v\text{cos}\theta$. As formas simbólicas de Coeficientes de escala foram associadas a razão entre os termos do quadrado da velocidade (v^2) e o raio (r), pois os dois são constantes e

a forma simbólica de Partes de um todo por conta da soma das componentes vetoriais que resultam no valor do vetor de aceleração (\vec{a}).

A equação [A.8](#) é a apresentação da definição do módulo de um vetor (a), descrito pelo quadrado da componente de a no eixo da abcissa (a_x^2) e o quadrado da componente de a no eixo da ordenada (a_y^2). As formas simbólicas associadas foram o Balanceamento, pois as componentes no eixo da abcissa e ordenada (a_x^2 e a_y^2), referente ao módulo do vetor (a), exprimem a equivalência entre influências orientadas (componentes de um vetor) dentro de uma equação, de modo que os termos analisados que concorrem na igualdade se equilibram e a forma simbólica Partes de um todo, pois as componentes da equação são parcelas de uma soma que resulta no valor do módulo.

A equação [A.9](#) é uma apresentação da definição de orientação angular do módulo de um vetor, em que $\tan\theta$ é uma relação trigonométrica da medida do ângulo entre as componentes do eixo da ordenada (a_y) e da abcissa (a_x). Foi associado a esta equação a forma simbólica de Mesma quantidade, pois a razão entre as componentes a_y e a_x não são influências orientadas, mas se relacionam em uma equivalência com o valor da tangente do ângulo entre as componentes ($\tan\theta$).

A equação [A.10](#) resulta de operacionalizações matemáticas advindas da aplicação da definição da equação [A.8](#) em [A.7](#). Dado que a equação [A.10](#) é idêntica a equação [A.1](#), será considerado a mesma associação da forma simbólica.

A equação [A.11](#) também foi resultado de uma operacionalização matemática, em que foi aplicada a definição apresentada na equação [A.9](#) em [A.7](#). As formas simbólicas associadas a esta equação foram o Cancelamento (b), visto que os termos se cancelaram devido ao fato dos termos referentes ao numerador e denominador serem idênticos e a forma simbólica Mesma quantidade, pois a tangente dos dois lados da equação são iguais e não possuem influências orientadas.

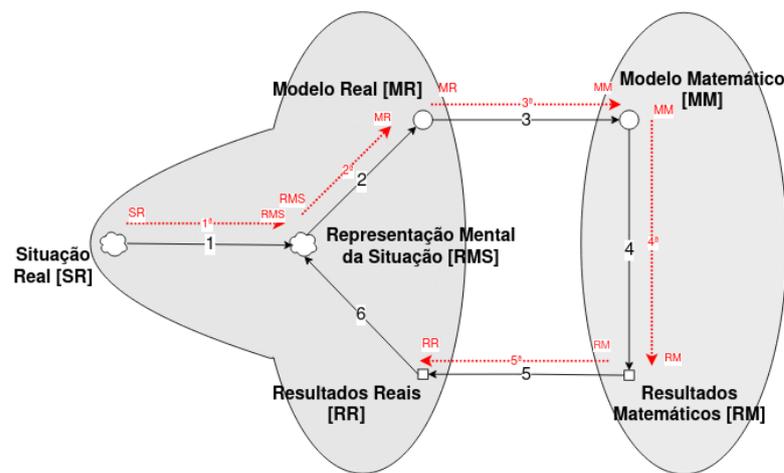
A equação [A.12](#) trata da aceleração (a) definida como a razão entre o produto de uma constante (2π) com a velocidade linear (v) sobre o período (T). A forma simbólica Prop+ foi associada para indicar a proporcionalidade direta entre (a) e ($2\pi v$), bem como a forma simbólica Prop- associada para indicar a proporcionalidade inversa entre (a) e (T), já a forma simbólica Coeficiente foi aplicada para indicar um fator constante (2π) não dotado de unidade de medida.

6.1.3 Rota de matematização

A rota de matematização adotada pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) é apresentada na Figura [6.3](#), onde a linha pontilhada vermelha descreve a ordem de transição entre as fases.

Com este mapa da rota, verifica-se que os autores efetuaram os processos de compreensão da tarefa, efetuando-se uma análise da Figura A.1 no primeiro estágio, a simplificação e estruturação da tarefa por meio da Figura A.2 no segundo estágio, o processo de matematização feito com as equações A.3, A.4 e A.5 no terceiro estágio, as operacionalizações matemáticas ocorreram no quarto estágio resultando nas equações A.6, A.7, A.8, A.10 e A.11 e no quinto estágio, com um estudo envolvendo a equação A.12, o conceito foi explorado e interpretado a partir da análise da relação entre as grandezas que apareceram no exercício resolvido pelos autores Halliday, Resnick e Walker (2016).

Figura 6.3 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta feita por Halliday, Resnick e Walker (2016)



Fonte: Próprio Autor

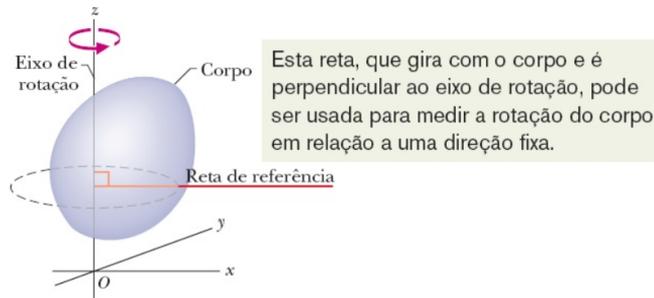
A Figura 6.3 ilustra a rota de matematização tomada pelos autores Halliday, Resnick e Walker (2016). É possível notar que não ocorreu a validação dos resultados obtidos, ficando a cargo do leitor efetuar estes processos previstos no sexto estágio de modelagem matemática.

6.1.4 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de velocidade angular (1º e 2º Estágio)

Na externalização do conceito de velocidade angular, Halliday, Resnick e Walker (2016) utilizaram os estilos de pensamento Visual e Integrado.

Inicialmente, os autores estruturaram seu pensamento com o estilo visual, visto que fora debatido por eles a definição do que é um corpo rígido através de uma idealização hipotética sobre quais os possíveis movimentos que ele pode efetuar (rotação pura, translação pura e a mistura de rotação e translação), sendo que para isto eles usaram da figura 6.4 a fim de auxiliar os argumentos na primeira (SR), segunda (RMS) e terceira fases (MR).

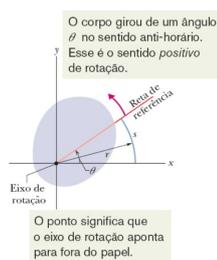
Figura 6.4 – Diagrama de movimento de um corpo rígido



Fonte: (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, p.603)

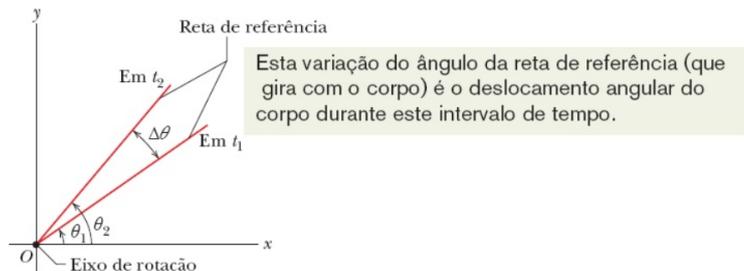
Posteriormente, na quarta (MM) e quinta fase (RM), foi adotado o estilo de pensamento matemático do tipo integrado, pois a externalização passou a ser feita com a combinação entre a análise das figuras 6.5 e 6.6 e o uso de símbolos e operacionalizações matemáticas nas equações A.13, A.14, A.15, A.16, A.17 e A.18.

Figura 6.5 – Diagrama de posição angular



Fonte: (Halliday, Resnick e Walker (2016, p.605)

Figura 6.6 – Diagrama de velocidade angular



Fonte: (Halliday, Resnick e Walker (2016, p.607)

6.1.5 Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de velocidade angular (3º e 4º Estágio)

Na quarta (MM) e quinta fase (RM), após o debate sobre os movimentos de corpos rígidos, foi apresentado pelos autores a equação A.13 a fim de descrever a definição de posição angular, as equações A.14 e A.15 como relações de conversão das unidades de medidas para ângulos, a equação A.16 designando o que é um deslocamento angular, equação A.17 para caracterizar velocidade angular média e a equação A.18 para velocidade angular instantânea.

Na tabela 6.2 foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração do conceito de velocidade angular, bem como as suas respectivas associações entre as variáveis e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

Tabela 6.2 – Equações utilizadas por Halliday para demonstração da equação de velocidade angular

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. A.13	$\theta = \frac{s}{r}$	Prop+ Prop-
Eq. A.14	$1rev = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi rad$	Mesma quantidade Coeficiente
Eq. A.15	$1rad = 57,3^\circ = 0,159rev$	Mesma quantidade
Eq. A.16	$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$	Oposição
Eq. A.17	$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	Prop+ Prop-
Eq. A.18	$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$	Mesma quantidade
Eq. A.19	$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	Prop+ Prop-
Eq. A.20	$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$	Mesma quantidade
Eq. A.21	$\omega = \int \alpha dt$	Mesma quantidade
Eq. A.22	$\theta = \int \omega dt$	Mesma quantidade

A equação [A.13](#) apresenta o conceito de ângulo (θ) definido pela razão de proporcionalidade geométrica entre o comprimento de um arco (s) e o raio (r) da circunferência. Neste caso, as formas simbólicas de Prop+ e Prop- foram associadas para indicar a proporcionalidade direta e inversa das variáveis do comprimento de arco e raio de circunferência com o ângulo em questão.

A equação [A.14](#) trata-se de fatores de conversões entre unidades de medidas para ângulos, sendo *rev* a unidade de revolução que significa uma volta completa dada em uma circunferência, 360° é a divisão de uma circunferência em 360 partes iguais, $2\pi r$ é o comprimento de circunferência e *rad* é equivalente a um arco de circunferência cuja sua medida é igual ao valor do raio r desta circunferência em questão. As formas simbólicas utilizadas foram a Mesma quantidade, visto que todos os termos são fatores de conversão e representam o mesmo valor, bem como a forma simbólica Coeficiente aplicada para indicar um fator constante (2π) não dotado de unidade.

A equação [A.15](#) é similar a equação [A.14](#), também trata-se de fatores de conversão entre unidades de medida para ângulos, difere-se apenas pelo fato de que os fatores estão condicionados a se relacionar levando em consideração *1rad* ao invés de *2πrad*. A forma simbólica associada também fora a Mesma quantidade e a justificativa é igual a feita para a equação [A.14](#).

A equação [A.16](#) apresenta o conceito de taxa de variação angular ($\Delta\theta$), definido como a diferença de valores entre o termo de θ_2 (valor angular no instante final t_2) e θ_1 (valor angular no instante inicial t_1). Foi associado a forma simbólica Oposição, isto porque os termos presentes na equação concorrem em relação ao resultado final, de maneira que a influência do valor de θ_2 ao se opor a θ_1 acaba resultando no valor que representa a distância entre os mesmos.

A equação [A.17](#) tem como intuito exibir o conceito de velocidade angular média ($\omega_{méd}$), definido pela razão entre as taxas de variações angulares ($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$) e temporais ($\Delta t = t_2 - t_1$). As formas simbólicas associadas foram de Prop+ para indicar a relação de proporcionalidade direta entre a velocidade angular (ω) e a taxa de variação da posição angular ($\theta_2 - \theta_1$), bem como a forma Prop- que indica a proporcionalidade inversa entre a velocidade angular e a taxa de variação do tempo ($t_2 - t_1$).

A equação [A.18](#) trata da velocidade angular instantânea (ω), obtida a partir da operacionalização de [A.17](#), onde aplica-se um limite na respectiva função ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$) com a variável de tempo tendendo a zero ($t \rightarrow 0$). A forma simbólica associada foi a Mesma quantidade, indicando que as operacionalizações matemáticas aplicadas, tanto do limite ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$) quanto a derivada de primeira ordem ($\frac{d\theta}{dt}$), possuem o mesmo valor em relação a velocidade angular (ω).

A equação [A.19](#) se propõe a apresentar o conceito de aceleração angular média ($\alpha_{méd}$), definida pela razão entre as taxas de variações da velocidade angular ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$) e temporais ($\Delta t = t_2 - t_1$). As formas simbólicas associadas foram de Prop+ para indicar a relação de proporcionalidade direta entre a aceleração angular ($\alpha_{méd}$) e a taxa de variação da velocidade angular ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$), bem como a forma Prop- que indica a proporcionalidade inversa entre a velocidade angular e a taxa de variação do tempo ($\Delta t = t_2 - t_1$).

A equação [A.20](#) refere-se a aceleração angular instantânea (α), obtida a partir da operacionalização de [A.19](#), onde aplica-se um limite na respectiva função ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$) com a variável de tempo tendendo a zero ($t \rightarrow 0$). A forma simbólica associada foi a Mesma quantidade, indicando que as operacionalizações matemáticas aplicadas, tanto do limite ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$) quanto a derivada de primeira ordem ($\frac{d\omega}{dt}$), possuem o mesmo valor em relação a aceleração angular (α).

A equação [A.21](#) apresenta o conceito de velocidade angular (ω) definida pela operacionalização matemática em que aplica-se o processo de integração na equação [A.19](#). A forma simbólica associada foi a Mesma quantidade, apontando a equivalência entre a velocidade angular (ω) com processo matemático de integração ($\int \alpha dt$).

A equação [A.22](#) trata do conceito de posição angular (θ) sendo possível ser obtida pelo processo de integração na equação [A.20](#). A forma simbólica associada foi a

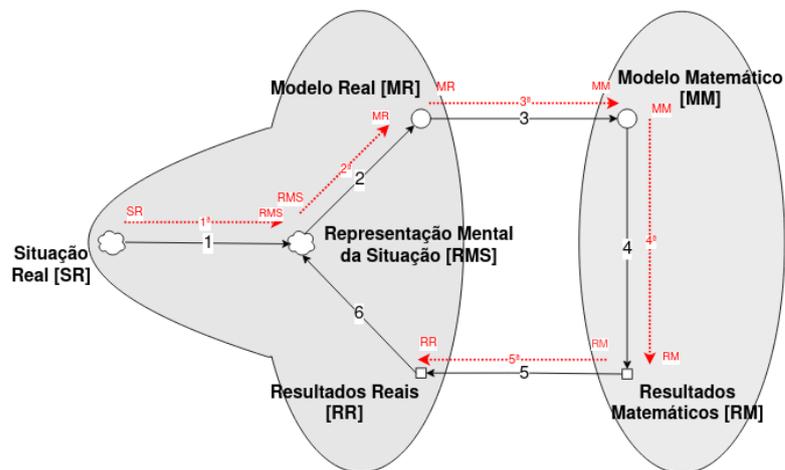
Mesma quantidade, apontando a equivalência entre a posição angular (ω) com o processo matemático de integração ($\int \omega dt$).

6.1.6 Rota de matematização

A rota de matematização quanto a construção do conceito de velocidade angular adotada pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) é apresentada na Figura [6.7](#), onde a linha pontilhada vermelha descreve a ordem de transição entre as fases.

Os processos de compreensão (primeiro estágio), simplificação e estruturação (segundo estágio) foram realizados a partir da análise da Figura [6.4](#), bem como o debate sobre o movimento de corpos rígidos. A matematização (terceiro estágio) e as operacionalizações matemáticas (quarto estágio), foram feitas com base nas figuras [6.5](#) e [6.6](#), resultando nas equações [A.13](#), [A.14](#), [A.15](#), [A.16](#), [A.17](#), [A.18](#), [A.19](#) e [A.20](#). Ocorreu uma interpretação (quinto estágio) e aplicação dos valores numéricos obtidos por operacionalizações e cálculos matemáticos a partir da análise da relação entre as grandezas que apareceram nas equações [A.21](#) e [A.22](#) presentes no exercício resolvido pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#).

Figura 6.7 – Rota de matematização do conceito de velocidade angular feita por [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#)



Fonte: Próprio Autor

A Figura [6.7](#) ilustra a rota de matematização tomada pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#). É possível notar que não ocorreu a validação dos resultados obtidos, ficando a cargo do leitor efetuar estes processos previstos no sexto estágio de modelagem matemática.

6.1.7 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares (1º e 2º Estágio)

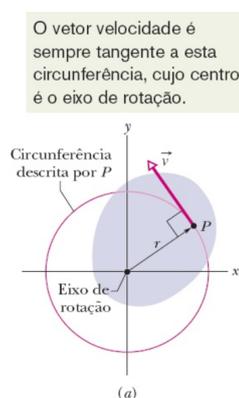
Na externalização da aceleração centrípeta a partir do uso de relações entre as variáveis lineares e angulares, [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) utilizaram, em grande parte da seção, o estilo de pensamento analítico e, em um momento específico, o estilo de pensamento integrado.

A priori, os autores estruturaram seu raciocínio com o estilo de pensamento analítico, onde na primeira fase (SR) idealizaram o objeto de estudo para a construção do conhecimento a partir do brinquedo carrossel. Ao efetuarem a transição para a segunda fase (RMS), os autores elaboram uma analogia do brinquedo com o conceito de corpo rígido realizando um movimento circular em torno de um eixo de rotação.

A transição para a terceira fase (MR) é feita com a discriminação de relações das variáveis lineares (arco de circunferência, velocidade linear e aceleração linear) com o conjunto de variáveis angulares (posição angular, a velocidade angular e a aceleração angular) sendo todos relacionados pelo valor da distância perpendicular do ponto em que a partícula se encontra até o eixo de rotação (valor do raio). Posteriormente na quarta fase (MM) foi apresentado a equação [A.23](#) e na transição para a quinta fase (RM), aplicando-se a operacionalização matemática de cálculo diferencial de primeira ordem na equação [A.23](#), obtêm-se as equações [A.24](#), [A.25](#), [A.26](#), [A.27](#), [A.28](#), [A.29](#) e [A.30](#).

Se faz necessário um adendo para a equação [A.25](#), a qual foi utilizado o estilo de pensamento integrado, visto que a figura [6.8](#) foi usada para auxiliar na elucidação do fato da velocidade linear escalar (v) sempre ser tangente a trajetória circular descrita pelo movimento que o corpo efetua.

Figura 6.8 – Direção da velocidade linear



Fonte: [\(HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, p.623\)](#)

6.1.8 Formas simbólicas utilizadas para demonstração da equação de de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares (3º e 4º Estágio)

Na quarta fase (MM), foi apresentado a equação [A.23](#) com o intuito de descrever a posição da partícula a partir do arco de circunferência (s). As equações [A.24](#) e [A.25](#) foram os resultados obtidos da derivada do arco de circunferência em função da variável de tempo tendendo a zero na equação [A.23](#). Já as equações [A.26](#) e [A.27](#) foram apresentadas para definir o conceito de período de revolução. As equações [A.28](#) e [A.29](#) são obtidas das derivadas de primeira ordem da equação [A.25](#), bem como [A.30](#) é obtido com a aplicação da equação [A.23](#) em [A.1](#). A equação [A.31](#) foi apresentada com intuito de explorar algumas relações do fenômeno em um exercício resolvido pelos autores.

Tabela 6.3 – Equações utilizadas por Halliday para demonstração da aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. A.23	$s = \theta r$	Prop+
Eq. A.24	$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$	Mesma quantidade Coeficiente de escala
Eq. A.25	$v = \omega r$	Prop+ Coeficiente de escala
Eq. A.26	$T = \frac{2\pi r}{v}$	Prop+ Prop- Coeficiente Coeficiente de escala
Eq. A.27	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	Prop+ Prop- Coeficiente
Eq. A.28	$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r$	Mesma quantidade Coeficiente de escala
Eq. A.29	$a_t = \alpha r$	Prop+ Coeficiente de escala
Eq. A.30	$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$	Prop+ Prop- Coeficiente de escala
Eq. A.31	$\theta = c \cdot t^3$	Prop+ Coeficiente de escala

Na tabela [6.3](#) foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração

do conceito de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares, bem como as suas respectivas associações entre os termos e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

A equação [A.23](#) tem como propósito designar a posição da partícula a partir do arco de circunferência (s) que, dado os conceitos de geometria, pode ser definido como o produto entre o ângulo (θ) e o raio (r) do arco de circunferência em questão. A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre a posição da partícula, em termos de arco de circunferência, com o ângulo e raio da trajetória circular percorrida.

A equação [A.24](#) trata-se da aplicação do cálculo diferencial na equação [A.23](#), em que o arco de circunferência (s), bem como a posição angular (θ), serão derivados em função do tempo (t). As formas simbólicas utilizadas foram a Mesma quantidade, indicando que as operacionalizações do lado esquerdo ($\frac{ds}{dt}$) e direito ($\frac{d\theta}{dt}r$) da equação, terão o mesmo valor, cabendo ressaltar que o termo que refere-se ao raio (r) é uma constante, desta forma atribui-se a este a forma simbólica Coeficiente de escala, indicando que é uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.25](#) refere-se ao resultado obtido do cálculo efetuado na equação [A.24](#), em que apresenta a equivalência do termo de velocidade linear (v) com o produto entre a velocidade angular (ω) e o raio (r). A forma simbólica de Prop+ foi aplicada para indicar uma proporcionalidade direta entre os termos de velocidade linear com a velocidade angular e o raio, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala que indica que o raio é uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.26](#) apresenta o conceito de período de revolução (T), definido pela razão do produto da constante (2π) com o raio (r) sobre a velocidade linear (v). As formas simbólicas Prop+ e Prop- foram utilizadas, respectivamente, para indicar uma proporcionalidade direta entre o período de revolução com o produto entre a constante e o raio e uma proporcionalidade inversa entre o período de revolução e a velocidade linear. Também foi utilizada a forma simbólica Coeficiente para indicar que 2π é uma constante sem uma unidade de medida adotada para ela, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala para apontar que o termo do raio (r) trata-se de uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.27](#) é similar a equação [A.26](#), difere-se apenas pelo fato de que o termo de velocidade linear (v) foi substituído pela velocidade angular (ω), sendo assim o termo do raio (r) sai da equação pois é cancelado na respectiva substituição citada. As formas simbólicas são Prop+ e Prop- utilizadas, respectivamente, para indicar uma proporcionalidade direta entre o período de revolução (T) e a constante (2π) e uma proporcionalidade inversa entre o período de revolução e a velocidade linear (v). Também

foi utilizada a forma simbólica Coeficiente para indicar que 2π é uma constante sem uma unidade de medida adotada para ela.

A equação [A.28](#) trata-se da aplicação do cálculo diferencial na equação [A.25](#), em que a velocidade linear (v), bem como a velocidade angular (ω), serão derivados em função do tempo (t). As formas simbólicas utilizadas foram a Mesma quantidade, indicando que as operacionalizações do lado esquerdo ($\frac{dv}{dt}$) e direito ($\frac{d\omega}{dt}r$) da equação, terão o mesmo valor, cabendo ressaltar que o termo que refere-se ao raio (r) é uma constante, desta forma atribui-se a este a forma simbólica Coeficiente de escala, indicando que é uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.29](#) tem o intuito de designar a aceleração tangencial (a_t) de uma partícula em movimento circular, sendo equivalente ao produto entre a aceleração angular (α) e o raio (r) do arco de circunferência que descreve a trajetória circular. A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre a aceleração tangencial com a aceleração angular, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala foi aplicada para indicar que o raio (r) é uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [A.30](#) é o resultado matemático da manipulação algébrica em que o valor da velocidade linear (v) referente a equação [A.25](#) é substituído na equação [A.1](#), obtendo-se a solução que a aceleração centrípeta (a_r) é equivalente a razão entre o quadrado da velocidade linear (v^2) pelo raio (r) da circunferência e, também é igual, ao produto entre o quadrado da velocidade angular (ω^2) e o raio (r). As formas simbólicas Prop+ e Prop- foram utilizadas, respectivamente, para indicar uma proporcionalidade direta entre os termos da aceleração centrípeta (a), o quadrado da velocidade linear (v^2), o quadrado da velocidade angular (ω^2) e o raio (r), bem como uma proporcionalidade inversa dos termos citados anteriormente com o raio (r). A forma simbólica Coeficiente de escala também foi utilizada para indicar que o raio (r) é uma constante com uma unidade de medida adotada.

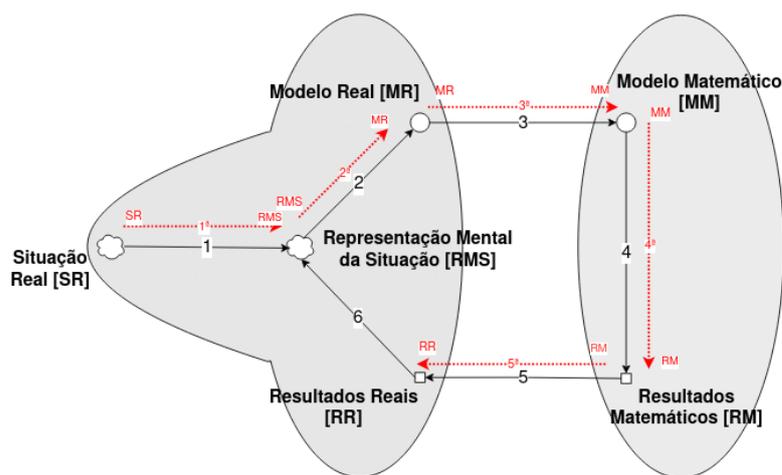
A equação [A.31](#) é uma função horária de posição angular (θ), idealizada, hipoteticamente, pelos autores para a realização de um exercício com o propósito de explorar as relações de grandezas físicas. Esta função é definida pelo produto entre a constante c ($c = 6,39 \cdot 10^{-2} rad/s^3$) e a variável de tempo (t). A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre a posição angular com o produto entre a constante definida pelos autores e a variável de tempo, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala foi aplicada para indicar que o termo c é uma constante dotada de unidade de medida.

6.1.9 Rota de matematização

A rota de matematização quanto a construção do conceito de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre as variáveis lineares e angulares adotada pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) é apresentada na Figura [6.9](#), onde a linha pontilhada vermelha descreve a ordem de transição entre as fases.

O processo de compreensão (primeiro estágio) a respeito do fenômeno é efetivado quando os autores debatem a analogia de um carrossel com o movimento circular uniforme, que posteriormente é simplificado e estruturado (segundo estágio) ao discriminar as relações das variáveis lineares (arco de circunferência, velocidade linear e aceleração linear) com o conjunto de variáveis angulares (posição angular, a velocidade angular e a aceleração angular). A matematização (terceiro estágio) é realizada quando os autores apresentam a equação [A.23](#) como o modelo matemático para representar uma distância percorrida por uma partícula no trajeto circular em função do arco de circunferência. A partir desta última equação citada é feita operacionalizações matemáticas (quarto estágio), resultando nas equações [A.24](#), [A.25](#), [A.26](#), [A.27](#), [A.28](#), [A.29](#) e [A.30](#). Ocorreu uma interpretação (quinto estágio) a partir de uma investigação com as operacionalizações e cálculos matemáticos das relações entre as grandezas que apareceram na equação [A.31](#) presente no exercício resolvido pelos autores.

Figura 6.9 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares feita por [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#)



Fonte: Próprio Autor

A Figura [6.9](#) ilustra a rota de matematização tomada pelos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#). É possível notar que não ocorreu a validação dos resultados obtidos, ficando a cargo do leitor efetuar estes processos previstos no sexto estágio de modelagem matemática.

6.2 RESULTADOS DA ANÁLISE DA DEMONSTRAÇÃO SEGUNDO MOYSÉS NUSSENZVEIG

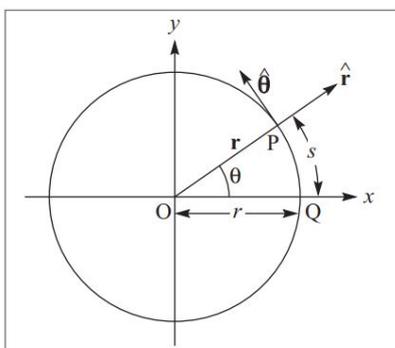
6.2.1 Estilo de pensamento matemático para demonstração da velocidade angular (1º e 2º estágio)

Nussenzveig (2013) adotou o estilo de pensamento matemático Integrado para estruturar matematicamente e construir o conceito de Velocidade Angular.

Em todo o processo de modelagem matemática que fez do fenômeno, o autor demonstrou de forma clara sua intenção de fazer tal demonstração sobre o movimento circular uniforme, efetuando uma transposição das variáveis lineares para circulares. Para isto, ele combinou o uso de figuras, que por sua vez contavam com fortes influências de conceitos à cerca de geometria e vetores, alinhados com o uso e análise de símbolos e operações matemáticas.

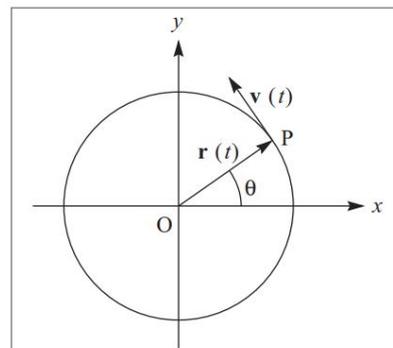
Na primeira (SR), segunda (RMS) e terceira fase (MR), suas argumentações são, geralmente, em língua corrente, onde o autor tenta descrever o fenômeno de movimento circular de uma partícula, discutindo a Figura 6.10 problematizando-a com representações de conceitos matemáticos vetoriais e geométricos. Posteriormente, na quarta (MM), quinta (RM) e sexta fase (RR), ele termina de formalizar matematicamente o conceito de velocidade angular, transpondo as equações lineares para circulares com o auxílio da Figura 6.11.

Figura 6.10 – Movimento circular



Fonte: Nussenzveig (2013, p.77)

Figura 6.11 – Velocidade instantânea



Fonte: Nussenzveig (2013, p.77)

6.2.2 Formas simbólicas utilizadas na demonstração da velocidade angular (3º e 4º estágio)

O autor Nussenzweig tem como intuito demonstrar as relações matemáticas através da transposição das variáveis lineares para circulares. Desta forma, na transição da terceira (MR) para a quarta fase (MM), ele apresenta a noção de arco de circunferência com o auxílio da equação [B.1](#), dado que agora a distância percorrida pela partícula será expressa em função deste arco. Para isto, ele evoca um conceito de função espacial horária com a equação [B.2](#), sendo esta uma relação que possui variáveis lineares. Sua transposição para variáveis circulares é feita a partir da equação [B.3](#), fazendo com que as variáveis de espaço sejam expressas agora em função de arcos de circunferência.

Após serem feitas aproximações, o autor apresenta a velocidade tangencial pela equação [B.4](#), o período por [B.5](#) e a relação matemática que descreve a frequência deste movimento pela equação [B.6](#), findando-se os processos da quarta fase (MM).

Na transição para a quinta fase (RM), Nussenzweig efetua operacionalizações matemáticas por meio de manipulações algébricas, colocando as variáveis lineares em termos de circulares, obtendo-se desta forma as equações [B.7](#), [B.8](#), [B.9](#) e [B.10](#).

Por fim desta modelização quanto a velocidade angular, o autor chega na sexta fase (RR) apresentado a equação [B.11](#), formalizando a direção vetorial.

Tabela 6.4 – Equações utilizadas por Moysés para deduzir a equação de Velocidade Angular

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. B.1	$s = r \cdot \theta$	Prop +
Eq. B.2	$x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0)$	Intensivo-Extensivo Partes de um todo
Eq. B.3	$s = s_0 + v \cdot (t - t_0)$	Intensivo-Extensivo Partes de um todo
Eq. B.4	$\vec{v} = v \cdot \hat{\theta}$	Prop+
Eq. B.5	$T = \frac{2\pi r}{v}$	Prop+ Prop- Coeficiente Coeficiente de escala
Eq. B.6	$\nu = \frac{1}{T}$	Prop-
Eq. B.7	$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$	Intensivo-Extensivo Partes de um todo

continua

			conclusão
Equação		Formas simbólicas aplicadas	
Eq. B.8	$\vec{\omega} = \frac{v}{r}$	Prop+	Prop-
Eq. B.9	$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$	Mesma quantidade	Prop+ Prop-
Eq. B.10	$ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	Mesma quantidade	Prop+ Prop- Coeficiente
Eq. B.11	$\vec{v} = \vec{\omega}r\hat{\theta}$	Prop+	Coeficiente de escala

Fonte: Próprio Autor

Na tabela [6.4](#) foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração do conceito de velocidade angular, bem como as suas respectivas associações entre os termos e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

A equação [B.1](#) tem o intuito de designar a posição de uma partícula em relação ao arco de circunferência (s) que, dado os conceitos de geometria, pode ser definido como o produto entre o ângulo (θ) e o raio (r) do arco de circunferência em questão. A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre a posição da partícula, em termos de arco de circunferência, com o ângulo e raio da trajetória circular percorrida.

A equação [B.2](#) é uma função horária espacial, utilizada em movimentos uniformes (aqueles que possuem velocidade de deslocamento constante), que possibilita a previsão da posição de uma partícula em qualquer instante decorrido do seu movimento. O cálculo matemático da posição final ($x(t)$) é definido pela soma das parcelas da posição inicial (x_0) e o produto entre a velocidade (v) e a taxa de variação temporal ($t - t_0$). Neste caso, foi associado para a equação a forma simbólica Intensivo-Extensivo com o propósito de indicar que existe um produto nesta equação entre um termo dotado de uma unidade de medida mista (m/s) com outro termo que possui uma unidade de medida simples (s). A outra forma simbólica utilizada foi a Partes de um todo, referindo-se ao processo da soma das parcelas com intuito de compor um conjunto que resulta no valor final de uma grandeza física.

A equação [B.3](#) é similar a equação [B.2](#), também trata-se de uma função horária espacial, entretanto difere-se desta pelo fato de que as termos de posição final (s) e inicial (s_0) são descritos em arcos de circunferência. A forma simbólica associada foi o Intensivo-Extensivo para indicar o produto entre um termo dotado de uma unidade de medida mista

(m/s) com outro termo que possui uma unidade de medida simples (s). A outra forma simbólica utilizada foi a Partes de um todo, referindo-se ao processo da soma das parcelas com intuito de compor um conjunto que resulta no valor final de uma grandeza física.

A equação [B.4](#) foi obtida após a transposição da equação [B.2](#) (variáveis lineares) para a equação [B.3](#) (variáveis angulares), em que [Nussenzveig \(2013\)](#) efetua uma aproximação das variáveis $|\Delta\vec{r}|$ (corda) e Δs (arco), afirmando que elas são iguais quando a taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), o que por consequência, implica na velocidade linear ser igual ao módulo da velocidade instantânea ($v = |\vec{v}|$) tangente a circunferência. Após a argumentação feita anteriormente pelo autor, é apresentado a equação [B.4](#) definindo que a orientação do vetor velocidade (\vec{v}) é dado pelo produto entre a velocidade linear (v) e o versor ($\hat{\theta}$). A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre o vetor velocidade e o produto entre a velocidade linear e o versor $\hat{\theta}$.

A equação [B.5](#) apresenta o conceito de período de revolução (T), definido pela razão do produto da constante (2π) com o raio (r) sobre a velocidade linear (v). As formas simbólicas Prop+ e Prop- foram utilizadas, respectivamente, para indicar uma proporcionalidade direta entre o período de revolução com o produto entre a constante e o raio e uma proporcionalidade inversa entre o período de revolução e a velocidade linear. Também foi utilizada a forma simbólica Coeficiente para indicar que 2π é uma constante sem uma unidade de medida adotada para ela, bem como a forma simbólica Coeficiente de escala para apontar que o termo do raio (r) trata-se de uma constante dotada de unidade de medida.

A equação [B.6](#) refere-se ao conceito de frequência (ν), definido como o inverso do período (T). A forma simbólica associada foi a Prop- para indicar uma relação de proporcionalidade inversa entre os termos de frequência e período.

A equação [B.7](#) tem como intuito prever matematicamente a posição angular final (θ) equivalente a soma das parcelas da posição inicial (θ_0) e o produto entre a velocidade angular (ω) e a taxa de variação temporal ($t - t_0$). Neste caso, foi associado para a equação a forma simbólica Intensivo-Extensivo com o propósito de indicar que existe um produto nesta equação entre um termo dotado de uma unidade de medida mista (rad/s) com outro termo que possui uma unidade de medida simples (s). A outra forma simbólica utilizada foi a Partes de um todo, referindo-se ao processo da soma das parcelas com intuito de compor um conjunto que resulta no valor final de uma grandeza física.

A equação [B.8](#) define que o vetor velocidade angular ($\vec{\omega}$) é equivalente a razão entre os termos de velocidade linear (v) e o raio (r) da trajetória circular percorrido pela partícula. A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar que a velocidade angular é diretamente proporcional a velocidade linear, já a forma simbólica Prop- foi aplicada para

apontar a relação inversamente proporcional do vetor de velocidade angular com o raio.

A equação [B.9](#) foi obtida mediante a manipulação algébrica da equação [B.7](#), mostrando a equivalência do vetor velocidade angular ($\vec{\omega}$) com a razão entre a taxa de variação angular ($d\theta$) com a taxa de variação de tempo (dt), bem como também com a razão entre a velocidade linear (v) e o raio (r) do trajeto circular percorrido pela partícula. A forma simbólica Mesma quantidade foi associada para mostrar que todas as operacionalizações ($\vec{\omega}$, $\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{v}{r}$) terão o mesmo valor. A forma simbólica Prop+ foi usada para indicar a proporcionalidade direta entre a velocidade angular e a velocidade linear e a forma simbólica Prop- para apontar a proporcionalidade inversamente proporcional entre a velocidade angular e o raio da circunferência.

A equação [B.10](#) mostra que também é possível definir o módulo da velocidade angular $|\omega|$ como a razão entre o produto da constante (2π) sobre o período de revolução (T) ou como o produto entre a constante (2π) e a frequência (ν). A forma simbólica Mesma quantidade foi associada para mostrar que todas as operacionalizações ($|\omega|$, $\frac{2\pi}{T}$ e $2\pi\nu$) terão o mesmo valor. A forma simbólica Prop+ foi usada para indicar a proporcionalidade direta entre o módulo da velocidade angular ($|\omega|$) e o produto entre a constante (2π) e a frequência (2ν), já a forma simbólica Prop- para apontar a proporcionalidade inversamente proporcional entre o módulo da velocidade angular ($|\omega|$) e o Período de revolução (T). E a forma simbólica Coeficiente para indicar que 2π é uma constante sem uma unidade de medida adotada para ela.

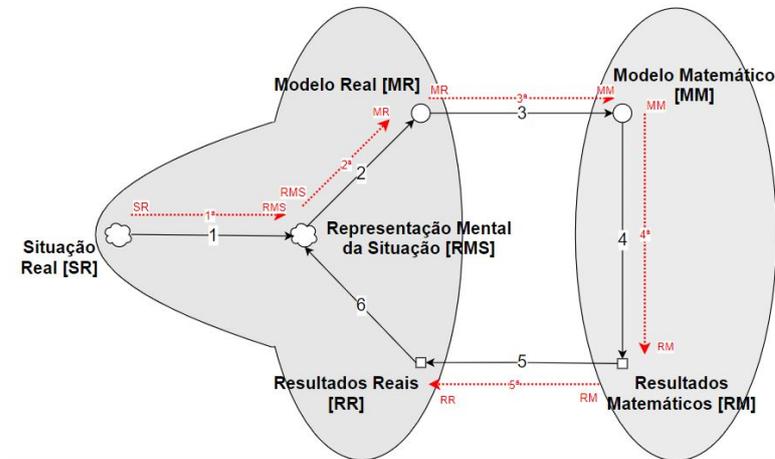
A equação [B.11](#) define que o vetor velocidade (\vec{v}) é dado pelo produto entre a velocidade angular (ω), o raio (r) do trajeto circular percorrido pela partícula e o versor ($\hat{\theta}$). A forma simbólica Prop+ foi utilizada para indicar uma proporcionalidade direta entre o vetor da velocidade linear (\vec{v}) com a velocidade angular ($\vec{\omega}$), o raio (r) da circunferência e o versor ($\hat{\theta}$), bem como a forma simbólica Coeficiente de escala indicando que o raio é uma constante dotada de unidade de medida.

6.2.3 Rota de matematização para demonstração da velocidade angular

A figura [6.12](#) apresenta o mapa da rota de matematização quanto a conceitualização de velocidade angular feita por Nussenzveig. Nota-se que o estágio de compreensão da tarefa foi feito a partir de uma idealização da conjectura do fenômeno em língua corrente, que posteriormente, no estágio de simplificação e estruturação, tais informações foram organizadas de maneira lógica, tendo como aporte a Figura [B.1](#). O estágio de matematização foi realizado com a apresentação das equações [B.1](#), [B.2](#), [B.3](#), [B.4](#), [B.5](#) e [B.6](#), já o estágio de operacionalizações matemáticas resultou nas equações [B.7](#), [B.8](#), [B.9](#) e [B.10](#). E, finalizando a modelagem de velocidade angular, o autor apresentou a equação

B.11, antes de efetuar o estágio de interpretação destes resultados matemáticos.

Figura 6.12 – Rota de matematização do conceito de velocidade angular feita por Nussenzveig (2013)



Fonte: Próprio Autor

A Figura 6.12 ilustra a rota de matematização tomada pelo autor Nussenzveig (2013). É possível notar que não ocorreu a validação dos resultados obtidos, ficando a cargo do leitor efetuar estes processos previstos no sexto estágio de modelagem matemática.

6.2.4 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo (1º e 2º estágio)

A primeira das formas proposta por Nussenzveig para demonstrar a equação de aceleração centrípeta, é dada pelo Método do Hodógrafo, em que autor utilizou o estilo de pensamento matemático visual.

Na primeira (SR), segunda (RMS) e terceira fase (RMS), o autor focou em estruturar o pensamento acerca do fenômeno, a partir da figura B.3. Para isto, ele associou o conceito do hodógrafo - conjunto de vetores velocidade $\vec{v}(t)$ que compõe um trajeto curvilíneo descrito pelo movimento do corpo - com a variação da direção vetorial da velocidade promovida pela aceleração centrípeta, resultando nas equações B.12 e B.13.

6.2.5 Formas simbólicas utilizadas na demonstração de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo (3º e 4º estágio)

A transição da terceira (MR) para a quarta fase (MM) foi efetuada a partir de uma análise geométrica da figura do hodógrafo. Para este propósito, o autor evocou e associou conceitos geométricos para estruturar as informações presentes nesta respectiva figura.

Posteriormente, na transição entre a quarta (MM) e quinta fase (RM), ele propôs manipulações algébricas, relacionando os conceitos já desenvolvidos de velocidade angular com os dados da figura [B.3](#), que foram apresentados sobre a forma da equação [B.12](#).

Por fim, Nussenzveig solicita aos leitores uma atenciosa análise da figura [B.3](#) para que seja possível notar que a orientação do sentido vetorial da aceleração será sempre dirigida ao centro, apresentando-se, enfim, a equação [B.13](#), sendo esta apenas uma análise visual da imagem, sem nenhum contexto ou formalização das operações matemáticas quanto a orientação do vetor.

Tabela 6.5 – Equações utilizadas por Moysés para deduzir a equação de Aceleração Centrípeta pelo Método do Hodógrafo

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. B.12	$ \vec{a} = \frac{v^2}{r}$	Prop+ Prop-
Eq. B.13	$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$	Prop+ Prop-

Fonte: Próprio Autor

Na tabela [6.5](#) foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração do conceito da aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo, bem como as suas respectivas associações entre os termos e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

A equação [B.12](#) refere-se ao conceito do módulo do vetor de aceleração centrípeta ($|\vec{a}|$), que pode ser descrito como a razão do quadrado da velocidade (v^2) de uma partícula ao realizar uma trajetória circular de raio (r). Neste caso, a forma simbólica Prop+ foi associada para indicar a proporcionalidade direta entre o módulo do vetor de aceleração centrípeta e o quadrado da velocidade, bem como a forma simbólica Prop- associada para indicar a proporcionalidade inversa entre o módulo do vetor de aceleração centrípeta e o raio da trajetória circular.

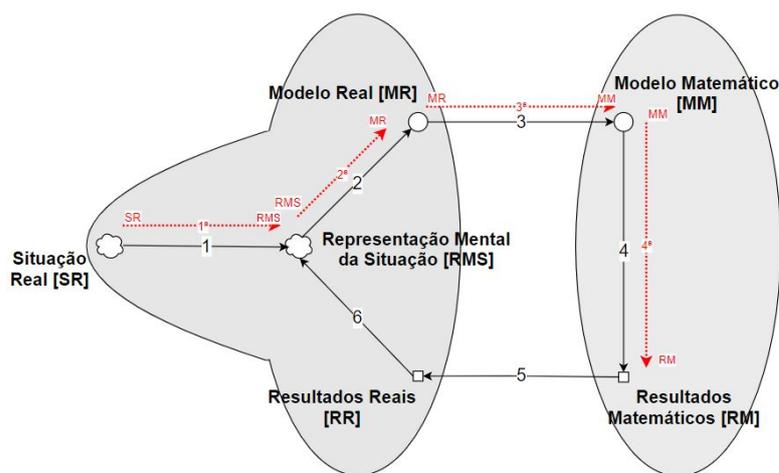
A equação [B.13](#) é similar a equação [B.12](#), também descreve a aceleração centrípeta, entretanto difere-se desta pelo fato de que um sinal de negativo foi atribuído ao lado direito da equação com intuito de mostrar que o vetor da aceleração centrípeta ($|\vec{a}|$) está sempre radialmente dirigido para o centro da trajetória circular percorrido pela partícula e também a inclusão do versor (\hat{r}) que indica a orientação da direção vetorial. A forma simbólica Prop+ foi associada para indicar a proporcionalidade direta entre o módulo do vetor de aceleração centrípeta e o quadrado da velocidade, bem como a forma simbólica Prop- associada para indicar a proporcionalidade inversa entre o módulo do vetor de aceleração centrípeta e o raio da trajetória circular.

6.2.6 Rota de matematização para demonstração de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo

A rota desta matematização inicia-se no estágio de compreensão da tarefa, a qual o autor conjecturou o fenômeno, descrevendo o fato de que, mesmo o módulo do vetor velocidade linear permanecer constante, existe uma variação em sua direção ao longo do trajeto promovido por uma aceleração. Já no estágio de simplificação e estruturação, o autor apresenta a figura [B.3](#), associando o conceito de hodógrafo com a variação da direção vetorial da velocidade.

O estágio de matematização foi realizado mediante uma análise geométrica da figura [B.3](#), resultando na equação [B.12](#) e, por fim, o estágio de operacionalizações matemáticas foi efetivado após serem propostas as manipulações algébricas, resultando na equação [B.13](#).

Figura 6.13 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta (pelo método do hodógrafo) feita por [Nussenzveig \(2013\)](#)



Fonte: Próprio Autor

Notamos pela figura [6.13](#) que, o autor Nussenzveig não efetuou o processo de interpretação e validação nesta demonstração.

6.2.7 Estilo de pensamento matemático para demonstração da equação de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade (1º e 2º estágio)

A segunda forma proposta por Nussenzveig para demonstrar a equação de aceleração centrípeta é dada pelo Método do Incremento de Velocidade.

Para este processo, o autor fez uso do estilo de pensamento matemático analítico, visto que sua externalização, referente a modelagem do conceito de aceleração no movimento

circular, a qual ocorre entre a primeira (SR) e segunda fase (RMS), é estruturada a partir da equação [B.14](#).

Entre a segunda (RMS) e terceira fase (MR), Nussenzveig efetua aproximações, afirmando que, quando o incremento da taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), o comprimento de $\Delta \vec{v}$ (corda) será igual ao s (arco de círculo), que possui um raio de circunferência equivalente ao módulo da velocidade ($r = |v|$). Feito tais aproximações, o autor apresenta a equação [B.15](#), efetuando transição da terceira (MR) para a quinta fase (RM).

6.2.8 Formas simbólicas utilizadas na demonstração de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade (3^o e 4^o estágio)

A idealização e a descrição da situação, prevista na transição entre a primeira (SR) e a segunda fase (RMS), são feitas com base na equação [B.14](#), utilizadas pelo autor para descrever a situação em que, uma partícula em movimento circular possui variação na direção vetorial de sua velocidade devido a uma aceleração impressa sobre este corpo.

A transição da segunda (RMS) para a terceira fase (MR), é feita após o autor associar a estrutura de símbolos matemáticos, que representam a velocidade do corpo em uma determinada posição - sendo $\vec{v}(t + \Delta t)$ o valor da velocidade para a posição final e $\vec{v}(t)$ a velocidade na posição inicial - presentes na equação [B.14](#) juntamente ao fato da direção vetorial da velocidade variar devido a uma aceleração, a qual também pode ser vista na figura [B.3](#).

Por fim, Nussenzveig parte da terceira (MR) direto para a quinta fase (RM), após efetuar aproximações, argumentando que existe uma correspondência entre a variação do ângulo ($\Delta \theta$) com a taxa de variação de tempo (Δt), sendo que no limite de $\Delta t \rightarrow 0$ o ângulo de θ também irá tender a zero ($\Delta \theta \rightarrow 0$), o valor de $\Delta \vec{v}$ (corda) será igual a s (arco de círculo) e r (raio) será equivalente ao módulo da velocidade ($|\vec{v}|$), ficando a cargo do leitor esta parte da demonstração, sendo apenas apresentado o resultado dado pela equação [B.15](#).

Na tabela [6.6](#) foram organizadas as equações utilizadas para a demonstração do conceito de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade, bem como as suas respectivas associações entre os termos e as formas simbólicas matemáticas que as estruturam.

Tabela 6.6 – Equações utilizadas por Moysés para deduzir a equação de Aceleração Centrípeta pelo Método de Incremento de Velocidade

	Equação	Formas simbólicas aplicadas
Eq. B.14	$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right] = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Mesma quantidade
Eq. B.15	$ \Delta\vec{v} \approx \vec{v} \Delta\theta \left\{ \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right.$	Mesma quantidade

Fonte: Próprio Autor

A equação B.14 define a função horária do vetor aceleração centrípeta, obtida tanto pelo processo de aplicação do limite na função $\left(\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}\right)$ com a variável de tempo tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), como também pela derivada de primeira ordem do vetor velocidade ($d\vec{v}$) em função do tempo (dt). A forma simbólica Mesma quantidade foi associada para mostrar que todas as operacionalizações possuem o mesmo valor.

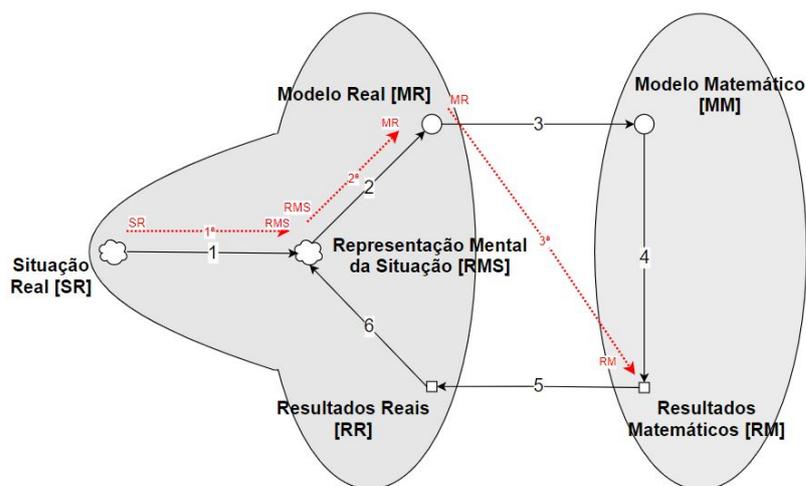
A equação B.15 é verdadeira quando a taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), pois o valor do módulo da taxa de variação de velocidade ($|\Delta\vec{v}|$) será aproximadamente igual ao produto entre o módulo do vetor velocidade (\vec{v}) pelo módulo da taxa de variação angular ($|\Delta\theta|$), resultando que a razão entre a taxa de variação de velocidade pelo tempo decorrido $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ será aproximadamente igual ao módulo da velocidade linear ($|v|$) pela razão entre a taxa de variação angular pelo tempo decorrido $\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$. A forma simbólica Mesma quantidade foi associada para mostrar que todas as operacionalizações possuem o mesmo valor.

6.2.9 Rota de matematização para demonstração de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade

Os estágios de compreensão efetuados na transição entre as fases (SR) e (RMS), bem como a simplificação e estruturação da tarefa, feitos na transição entre as fases (RMS) e (MR), foram feitas a partir da equação B.14.

Após serem feitos tais processos, o autor Nussenzveig propõe aproximações das variáveis desta última equação, apresentando logo em seguida uma solução matemática para explicar o porque do módulo da velocidade se manter constante mesmo com a direção vetorial desta velocidade se modificando ao longo do trajeto. Para isto, o autor parte da terceira fase (MR) direto para a quinta (RM), omitindo o desenvolvimento das manipulações algébricas para chegar diretamente na conclusão de B.15.

Figura 6.14 – Rota de matematização do conceito de aceleração centrípeta (por incremento de velocidade) feita por [Nussenzveig \(2013\)](#)



Fonte: Próprio Autor

Desta forma, tendo em vista esta rota de matematização adotada, é possível inferir que o autor não efetuou os processos de matematização, operacionalização matemática, interpretação e validação nesta respectiva demonstração.

6.3 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DAS ESTRUTURAS MATEMÁTICAS PRESENTES EM AMBAS AS OBRAS

Após a análise das estruturas matemáticas feitas a partir dos ciclos de modelagem da autora [Ferri \(2006\)](#), foi possível identificar e indicar as semelhanças e diferenças quanto as estruturas matemáticas que existem nas obras dos autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) e [Nussenzveig \(2013\)](#), levando em consideração o estilo de pensamento matemático, as formas simbólicas e a rota de matematização.

6.3.1 Comparação de estilos de pensamento matemático

A partir da análise feita nas obras investigadas foi possível inferir que, os autores empregaram maneiras diferentes para adotar os estilos de pensamento matemático em cada demonstração feita.

No caso do autor Halliday, para cada demonstração, foram utilizados dois tipos de estilos de pensamento matemáticos diferentes: para a demonstração da aceleração centrípeta, obtida pelo cálculo da derivada da velocidade linear, foi adotado na 1ª, 2ª e 3ª fases o estilo visual, enquanto que na 4ª, 5ª e 6ª fases foi utilizado o estilo integrado. O

mesmo ocorreu para a demonstração da velocidade angular, tendo sido adotado na 1^a, 2^a e 3^a fases o estilo visual e para a 4^a, 5^a e 6^a fases o estilo integrado. Já para a demonstração da aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre as variáveis lineares e angulares, foi adotado na 1^a, 2^a, 3^a e 4^a fases o estilo analítico e na 5^a fase foi adotado o estilo integrado.

O autor Nussenzveig, para cada demonstração, utilizou apenas um estilo de pensamento diferente: para a demonstração da velocidade angular, empregou-se o estilo integrado, visto que o autor combinou o uso de figuras com argumentações estruturadas por uma lógica e simbologia matemática, de maneira a efetuar a transposição das variáveis lineares para as circulares. Na demonstração da aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo, o autor utilizou o estilo visual, pois sua estrutura de pensamento para externalizar o conceito foi focada na discussão da figura [B.3](#). No caso da demonstração da aceleração centrípeta perante o método do incremento de velocidade, foi adotado o estilo analítico, pois os resultados matemáticos foram alcançados mediante a operacionalização matemática da equação [B.14](#).

6.3.2 Comparação de formas simbólicas

Com a análise feita referente as formas simbólicas nos dois livros-texto investigados, foi possível identificar semelhanças quanto as estruturas empregadas nas equações utilizadas pelos autores.

A forma simbólica com maior incidência para ambas as obras foi a Prop+, tendo um valor de ocorrência de 23,73% para a obra de Halliday e 30% a de Nussenzveig. Isto indica que, aproximadamente 1/4 das demonstrações feitas por ambos os autores, fez uso de uma estrutura de equação que promove relações de proporcionalidades diretas entre grandezas físicas. A forma simbólica Prop-, que promove relações de proporcionalidades inversas entre grandezas físicas, também teve uma taxa percentual, aproximadamente, igual entre os livros, sendo de 16,95% para a obra do Halliday (terceira maior incidência deste autor) e 23,33% para a de Nussenzveig (segunda maior incidência deste autor).

Outra semelhança relevante entre as obras foi o valor de incidência da forma simbólica Mesma quantidade que, por sua vez, foi associada, em geral, para operações de cálculos diferenciais ou integrais por ambos os autores. No caso do Halliday, o valor foi de 16,95%, e do Nussenzveig, de 13,33%, apontando que, em média, os dois autores utilizaram 15% de estruturas matemáticas atreladas a cálculos diferenciais e integrais em suas respectivas demonstrações.

Tabela 6.7 – Incidência de Formas Simbólicas Utilizadas Pelos Autores

Forma simbólica aplicada	David Halliday		Moysés Nussenzveig	
	Número de vezes que foi utilizado	Incidência	Número de vezes que foi utilizado	Incidência
Balanceamento	1	1,7%	0	0%
Cancelamento (b)	1	1,7%	0	0%
Coefficiente	4	6,78%	2	6,67%
Coefficiente de escala	12	20,34%	2	6,67%
Intensivo-Extensivo	0	0%	3	10%
Mesma quantidade	10	16,95%	4	13,33%
Oposição	1	1,7%	0	0%
Partes de um todo	6	10,17%	3	10%
Prop+	14	23,73%	9	30%
Prop-	10	16,95%	7	23,33%
TOTAL	59	100%	30	100%

Fonte: Próprio Autor

6.3.3 Comparação das rotas de matematização

As análises realizadas nas duas obras que foram investigadas neste TCC quanto as rotas de matematização indicaram os resultados a seguir:

Nas três demonstrações feitas pelo autor Halliday (aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear, velocidade angular e aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares), estruturaram do pensamento seguindo rotas de matematização iguais:

$$SR \rightarrow RMS \rightarrow MR \rightarrow MM \rightarrow RM \rightarrow RR.$$

Já para o caso da obra de Nussenzveig existem três rotas de matematização diferentes quanto as demonstrações feitas.

A rota de velocidade angular teve a seguinte ordem:

$$SR \rightarrow RMS \rightarrow MR \rightarrow MM \rightarrow RM \rightarrow RR.$$

A rota de aceleração centrípeta pelo método do hodógrafo:

$$SR \rightarrow RMS \rightarrow MR \rightarrow MM \rightarrow RM.$$

A rota de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade:

$$SR \rightarrow RMS \rightarrow MR \rightarrow RM.$$

Com estes resultados é possível inferir que Halliday, nas três demonstrações (aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear, velocidade angular e aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre variáveis lineares e angulares), assim como Nussenzveig na demonstração de velocidade angular, efetivaram cinco fases do processo de modelagem matemática, deixando de realizar o sexto e último estágio (validação), sendo este de suma importância. Autores como [FUKE e YAMAMOTO \(2010\)](#) e [GASPAR \(2011\)](#) escreveram obras para o ensino de física voltadas para o ensino médio que propõem atividades práticas no final da construção dos conceitos estudados, sendo esta uma possibilidade do livro-texto de efetivar a validação dos conceitos aprendidos.

Outro ponto de relevância para se abordar nos resultados das rotas de matematização refere-se ao fato de Nussenzveig, na estruturação de aceleração centrípeta pelo método de incremento de velocidade, ter passado da terceira fase (MR) direto para a quinta (RM). Isto decorre-se da omissão de processos de matematização, em que o autor apenas apresenta os resultados matemáticos sem orientar o leitor em como realizar os cálculos para se obter o mesmo. Para alguns estudantes, este pode ser um fator de dificuldade para a construção do respectivo conceito.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para este Trabalho de Conclusão de Curso, a pesquisa realizada suscitou-se da inquietação quanto ao fato dos professores de física do IFSP Caraguatatuba terem diferentes predileções sobre os Livros-Textos utilizados para apoio de suas respectivas aulas. Quanto a isto, a pesquisa apontou que as obras, assim como seus respectivos autores, possuem características e estilos diferentes quanto a estruturação matemática dos conceitos físicos que, por sua vez, podem ser categorizados, sendo a modelagem matemática uma ferramenta para isto. Uma hipótese para pesquisar futuramente com a intenção de responder porque os professores têm certas preferências por algumas obras, é a de que o estilo de estruturação matemática dos conceitos físicos do professor é similar ao estilo de estruturação do autor da obra, sendo este estilo de estruturação construído através de sua formação acadêmica por influência do meio em que ele participou (professores, colegas, família, etc.)

Referente a pesquisa que foi realizada neste TCC, foram escolhidos três metodologias heurísticas, sendo elas as [1] rotas dos ciclos de modelagem matemática para apresentar a rota seguida pelos autores de internalização e externalização dos processos de compreensão e estruturação matemática de um dado conceito, os [2] estilos de pensamento matemático, que exprimem os tipos de escolha que indivíduos adotam para internalizar e externalizar suas respectivas construções quanto aos conceitos estudados e [3] Formas Simbólicas, designado para compreender o vocabulário matemático utilizado pelos autores no processo de externalização de um dado conceito por meio de uma equação matemática.

A escolha destes três critérios atenderam, de modo verossímil, o primeiro objetivo específico, visto que foram identificados critérios de análise para materiais didáticos de física e, os mesmos, também foram caracterizados para serem empregados na análise das obras.

A investigação feita nos livros, pautadas nos critérios levantados, possibilitaram identificar a existência de semelhanças e diferenças na estruturação matemática do conceito de aceleração centrípeta de cada livro-texto examinado:

Quanto aos estilos de pensamento matemático, Halliday mesclou mais de um estilo em cada demonstração que foi investigada, enquanto Nussenzweig optou por utilizar apenas um estilo diferente em cada demonstração. Em relação a este caráter, notamos que o autor Halliday se mostrou mais analítico, tal afirmação pode ser justificada tanto com a demonstração de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear que, é notável o uso instrumental do cálculo diferencial em grande parte do processo de matematização, quanto nos exercícios resolvidos que, em geral tratou-se de resoluções de problemas matemáticos onde o autor aplicou as equações demonstradas para obter

resultados numéricos, existindo pouca discussão sobre os resultados matemáticos e a interpretação das estruturas matemáticas utilizadas. Já Nussenzweig manifestou em sua obra um caráter mais conceitual, existindo momentos (demonstração da aceleração centrípeta pelo método do incremento de velocidade) em que o autor omitia passos do processo de matematização, entregando ao leitor a conceitualização e o resultado matemático, mas sem apresentar os cálculos feitos para chegar na equação em questão.

Em relação as formas simbólicas, a pesquisada realizada nas obras indica que, existem semelhanças entre as duas. A forma simbólica Mesma quantidade, associada, em geral, para processos de cálculos de limites, derivadas e integrais, teve um valor de incidência de aproximadamente 15% em ambas as obras. A forma Prop+ teve a maior ocorrência, com um valor de aproximadamente 25% de incidência em ambas as obras, apontando que os autores utilizaram estruturas matemáticas de relações de proporcionalidades diretas entre grandezas físicas em 1/4 de suas demonstrações quanto ao conceito de aceleração centrípeta.

A análise das rotas de matematização mostrou que ambas as obras não chegaram a realizar o processo de validação da construção do conceito. Os resultados matemáticos esperados foram obtidos, entretanto não existiu uma proposta de prática experimental ou um debate para levar o estudante a associar e comprovar os conceitos construídos com as experiências da realidade em que vive.

O resultado obtido da análise e comparação das obras indica, de modo plausível, o atendimento do segundo objetivo específico deste trabalho, constatando que existem diferenças de estruturação matemática entre as obras e indicando tais alteridades.

Não foi o intento deste trabalho de conclusão de curso querer encontrar ou advogar a favor de qual é a melhor obra, mas sim compreender qual a estrutura matemática presente em cada livro-texto. Com os resultados desta pesquisa, entendemos que não basta tomar cuidado com a escolha do livro didático, mas também compreender se o alunado e a obra possuem correspondência de características e estilos de estruturação do pensamento quanto aos conceitos físicos. Uma hipótese para futura pesquisa seria investigar e caracterizar o estilo de pensamento matemático dos estudantes possuem com o intuito de nortear a escolha das obras didáticas.

Ao findar da investigação, é possível inferir que pode existir potencial, em relação ao Ensino de física, na investigação e avaliação da forma como as estruturas matemáticas foram empregadas na apresentação de conceitos físicos. Dito isso, verificamos que é possível diferir e escolher livros-textos de maneira menos subjetiva e mais consciente para as necessidades do processo de construção do conhecimento, respeitando as particularidades/especificidades de cada turma ou grupo de alunos.

Mediante a tais resultados, estimulou-se duas novas hipóteses para futuras pesquisas:

[1] "A similaridade do tipo de estruturação matemática entre os materiais didáticos e o estudante promove um Ensino de física mais efetivo". Sendo esta uma investigação da compatibilidade entre o estilo de estruturação matemática adotada pelo material didático e a que o estudante possui uma maior predisposição.

[2] "Caso seja empregado a análise de ciclos de modelagem matemática em outros conceitos físicos presentes nestes mesmos livros-texto dos autores Halliday e Nussenzweig, as estruturas matemáticas encontradas na investigação do TCC serão similares a esta?". Pesquisa com intento de averiguar se as estruturas encontradas são uma característica de um estilo do autor que se aplica a maioria dos conceitos ou apenas para o caso da aceleração centrípeta.

REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. Citado na página [22](#).
- BLUM, W.; LEISS, D. “filling up”-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: *CERME 4-Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1623–1633. Citado 2 vezes nas páginas [22](#) e [24](#).
- CONCHETI, A. F. *A pluralidade da relação entre a física e a matemática em um curso inicial de licenciatura em física*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015. Citado na página [17](#).
- D’AMBROSIO, U. Mathematical modeling: Cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modelling and application*, v. 1, n. 1, p. 89–98, 2009. Citado na página [22](#).
- FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, Springer, v. 38, n. 2, p. 86–95, 2006. Citado 5 vezes nas páginas [6](#), [22](#), [23](#), [24](#) e [53](#).
- FERRI, R. B. Modelling problems from a cognitive perspective. In: *Mathematical Modelling*. [S.l.]: Elsevier, 2007. p. 260–270. Citado na página [23](#).
- FERRI, R. B. Mathematical thinking styles and their influence on teaching and learning mathematics. In: *12th International Congress on Mathematical Education*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 8. Citado na página [25](#).
- FONTELLES, M. J. et al. Metodologia da pesquisa científica: diretrizes para a elaboração de um protocolo de pesquisa. *Revista paraense de medicina*, v. 23, n. 3, p. 1–8, 2009. Citado na página [20](#).
- FREIRE, P. Educação “bancária” e educação libertadora. *Introdução à psicologia escolar*, Casa do Psicólogo São Paulo, v. 3, p. 61–78, 1997. Citado na página [17](#).
- FUKE, L. F.; YAMAMOTO, K. Física para o ensino médio. *São Paulo: Saraiva*, v. 1, 2010. Citado na página [56](#).
- GALILEI, G. Il saggiaiore (1623). *Opere, A Favaro (ed.)*, v. 6, 2005. Citado na página [18](#).
- GASPAR, A. Compreendendo a física: Mecânica. vol. 1. *Ática*. São Paulo, 2011. Citado na página [56](#).
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física. Vol. I*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2016. Citado 22 vezes nas páginas [6](#), [8](#), [20](#), [28](#), [32](#), [33](#), [34](#), [37](#), [38](#), [42](#), [53](#), [62](#), [63](#), [64](#), [66](#), [68](#), [69](#), [70](#), [71](#), [74](#), [75](#) e [76](#).
- KARAM, R. A. S. Distorção do papel da matemática na resolução de problemas de física. *Enseñanza de las ciencias*, n. Extra, p. 1750–1753, 2009. Citado na página [13](#).

KARAM, R. A. S. *Estruturação matemática do pensamento físico no ensino: uma ferramenta teórica para analisar abordagens didáticas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [15](#) e [20](#).

KARAM, R. A. S.; PIETROCOLA, M. Habilidades técnicas versus habilidades estruturantes: resolução de problemas e o papel da matemática como estruturante do pensamento físico. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 181–205, 2009. Citado na página [13](#).

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 394. Citado 13 vezes nas páginas [6](#), [8](#), [20](#), [43](#), [46](#), [48](#), [50](#), [53](#), [79](#), [80](#), [82](#), [83](#) e [85](#).

PATY, M. *The idea of quantity at the origin of the legitimacy of mathematization in physics*. [S.l.]: Rowman & Littlefield, Lanham, 2003. Citado na página [15](#).

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno brasileiro de ensino de física*, v. 19, n. 1, p. 93–114, 2002. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [17](#).

PIETROCOLA, M. Linguagem e estruturação do pensamento na ciência e no ensino de ciências. *Filosofia, Ciência E História*, 2005. Citado na página [18](#).

SHERIN, B. L. How students understand physics equations. *Cognition and instruction*, Taylor & Francis, v. 19, n. 4, p. 479–541, 2001. Citado 3 vezes nas páginas [26](#), [82](#) e [87](#).

SILVA, H. *Matematização e modelagem matemática: possíveis aproximações*. Tese (Doutorado) — Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática . . . , 2013. Citado na página [23](#).

SILVA, P. O. d. et al. Os desafios no ensino e aprendizagem da física no ensino médio. 2018. Citado na página [17](#).

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, Derby, v. 77, n. 1, p. 20–26, 1976. Citado na página [27](#).

STERNBERG, R. J. *Thinking styles*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999. Citado na página [25](#).

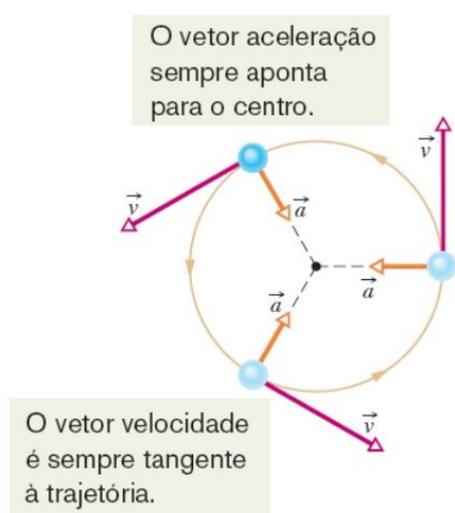
TUMINARO, J. *A cognitive framework for analyzing and describing introductory students' use and understanding of mathematics in physics*. [S.l.]: University of Maryland, College Park, 2004. Citado na página [13](#).

VARGAS, M. História da matematização da natureza. *Estudos avançados*, SciELO Brasil, v. 10, p. 249–276, 1996. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [15](#) e [16](#).

APÊNDICE A – ANÁLISE DA DEMONSTRAÇÃO DE ACELERAÇÃO CENTRÍPETA SEGUNDO DAVID HALLIDAY

Construção do conceito de aceleração centrípeta por derivação da velocidade linear:

Figura A.1 – Vetores velocidade e aceleração no MCU



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.191)

Os autores [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) iniciam a discussão à respeito de aceleração centrípeta afirmando que existem duas possíveis trajetórias de uma partícula em movimento circular uniforme, podendo ser uma circunferência ou um arco de circunferência, as quais em ambos os casos, sua velocidade escalar será constante em todos os pontos do trajeto. Complementando esta última afirmação, os autores mencionam que apesar da velocidade escalar ser constante (seu módulo não se altera), essa partícula está acelerada, visto que a direção da velocidade está mudando. Para ilustrar a relação entre a velocidade escalar constante, a mudança de direção da mesma e a aceleração que a partícula sofre, foi proposto a figura [A.1](#), a qual possui o intuito de mostrar que o módulo dos vetores (tanto de velocidade quanto de aceleração) permanecem constante ao longo de todo o trajeto, entretanto sua respectiva orientação varia.

Depois de propor a análise da figura em questão, os autores argumentam que a orientação da velocidade é sempre tangente a circunferência e seu sentido será sempre o mesmo (horário ou anti-horário), já a aceleração tem direção radial com sentido apontando para o centro da circunferência. Sendo este o motivo de chamar tal conceito de aceleração centrípeta (que busca o centro).

A priori, percebe-se que os autores seguiram um estilo de pensamento visual, externalizando as ideias com auxílio da figura [A.1](#), utilizando na grande maioria dos argumentos definições em língua corrente, fazendo uso de ideias matemáticas apenas com os conceitos geométricos de circunferência e módulos e orientações vetoriais.

Após feita esta sucinta definição inicial de movimento circular uniforme, os autores apresentam duas equações, sendo a primeira, a relação que descreve a aceleração centrípeta, a qual será demonstrada:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (\text{A.1})$$

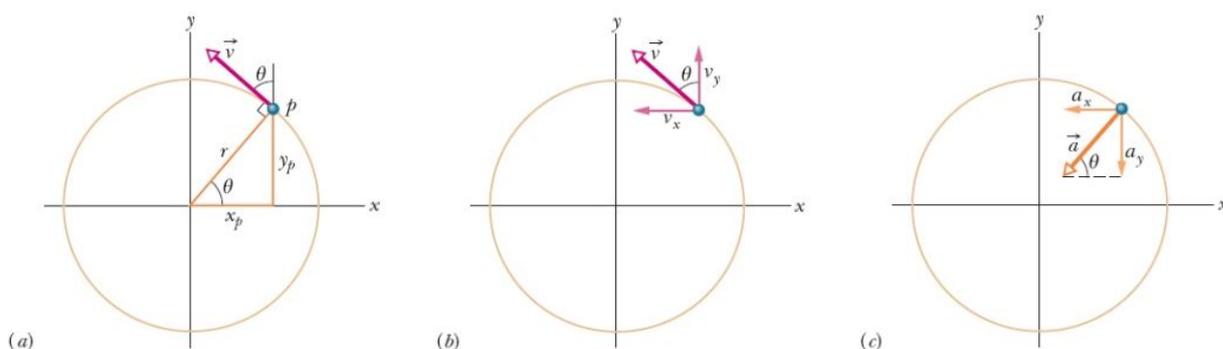
E a segunda é a equação que descreve o período de revolução $[T]$, relacionado com o comprimento de circunferência $(2\pi r)$ e a velocidade da partícula $[v]$:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{A.2})$$

A equação [A.2](#) foi utilizada apenas como um ente de matemática instrumental, destinada para o uso futuro de resoluções de problemas propostos no respectivo livro.

Demonstração da Equação:

Figura A.2 – Partícula p em movimento MCU



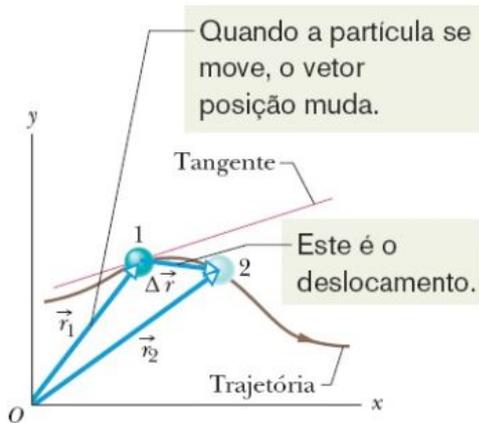
Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.193)

A priori os autores propõem que seja feita uma análise das ilustrações referente a figura [A.2](#) a fim de determinar o módulo e orientação da aceleração. Para isto, Halliday sugere uma situação hipotética onde um partícula p se move ao longo de um trajeto circular com raio r com velocidade escalar constante v , a qual no instante em questão que está sendo analisado, as coordenadas da partícula são x_p e y_p .

Aqui, os autores partem da primeira fase (SR) para a segunda (RMS), criando um enredo (corpo em movimento circular uniforme), compreendendo que é necessário determinar o módulo e orientação da aceleração deste movimento para descrever matematicamente a situação fenomenológica. Posteriormente eles fazem a transição da segunda fase (RMS) para a terceira (MR), executando simplificações - dizendo que o corpo trata-se de uma partícula (puntiforme), que por sua vez, desconsidera diversos fatores que não são relevantes para o processo de matematização - e estruturando as informações por meio de um esboço pictórico ao qual organiza as informações à respeito dos vetores velocidade e aceleração da partícula.

Os autores afirmam que a velocidade v da partícula em movimento é sempre tangente a trajetória circular, justificando seu argumento evocando uma definição de velocidade feita no capítulo 4 - Movimento em duas e três dimensões - (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, p.169) ilustrado na figura A.3.

Figura A.3 – Reta tangente a trajetória



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p.169)

Como pode ser visto na figura A.3 temos a trajetória de uma partícula em um plano r^2 , sendo escolhidos dois pontos (1 e 2) desta, correspondentes aos vetores posição r_1 e r_2 que representam o deslocamento da partícula (Δr) dentro de um intervalo de tempo Δt .

Para calcular-se a velocidade instantânea no instante t_1 (corresponde ao momento em que a partícula está na posição 1) é necessário diminuir o intervalo de tempo Δt , de modo que o mesmo tenda a zero. Por consequência desta redução no intervalo Δt , o vetor r_2 referente a posição 2 irá se aproximar de r_1 fazendo com que Δr também tenda a zero, de modo que a razão entre a taxa de deslocamento em função do tempo ($\Delta r / \Delta t$) se aproxime da reta tangente no ponto 1.

Sendo assim os autores Halliday, Resnick e Walker (2016) trazem a seguinte definição;

Definição A.1 (Direção da Velocidade Instantânea). *A direção da velocidade instantânea \vec{v} de uma partícula é sempre tangente a trajetória da partícula na posição da partícula.*

Podendo ser escrita, usando a linguagem de cálculo diferencial, como a primeira derivada espacial;

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (\text{A.3})$$

Ao evocarem esta definição, os autores efetuam a transição da terceira fase (MR) para a quarta fase (MM), onde os argumentos se apresentam por meio do uso de símbolos matemáticos estruturados sob um determinada lógica que descreve o fenômeno. Neste caso, eles deixam de argumentar sobre o conceito fazendo uso da língua corrente para então, externalizar a partir de estruturas matemáticas, demonstrando uma mudança no estilo de pensamento matemático, o qual inicialmente era visual, passando agora para um Estilo Integrado, visto que serão combinados uso de imagens e símbolos matemáticos para a respectiva construção do conceito.

Nota-se que o uso destas estruturas matemáticas foram do tipo relacional, visto que foram utilizadas para justificar e dar sentido a afirmação feita com relação a direção do vetor velocidade presente na figura A.2 (a) e (b).

Seguindo a demonstração dos autores, é solicitado que seja feita uma análise geométrica da figura [A.2](#) empregando a definição [A.1](#), resultando-se que o vetor \vec{v} será perpendicular a reta r que representa o raio da circunferência. Foi traçado uma reta paralela ao eixo y passando pelo ponto p , sendo possível afirmar através do conceito de ângulos complementares que, o respectivo ângulo θ entre o vetor \vec{v} e a reta paralela ao eixo y tem o mesmo valor do ângulo θ entre a reta r que representa o raio e o eixo x .

Sendo assim, é possível decompor o vetor velocidade \vec{v} nas seguintes componetes;

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \cdot \text{sen}\theta) \hat{i} + (v \cdot \text{cos}\theta) \hat{j} \quad (\text{A.4})$$

Os termos de $-\text{sen}\theta$ e $\text{cos}\theta$ que apareceram na equação [A.4](#) foram obtidos por meio do triângulo retângulo que é composto pelo vetor velocidade \vec{v} (hipotenusa) e as retas traçadas paralelas ao eixo y (cateto adjacente ao ângulo θ) e eixo x (cateto oposto ao ângulo θ). No caso do $-\text{sen}\theta$, este termo é negativo pois o sentido vetorial de sua orientação está apontado para o lado esquerdo com relação a origem do sistema cartesiano em questão.

Com o intento de expressar a equação [A.4](#) em função do raio r da circunferência, utiliza-se o outro triângulo retângulo presente na figura [A.2](#) (a), composto pela reta do raio r (hipotenusa), a componente x_p (cateto adjacente ao ângulo θ) e a componente y_p (cateto oposto ao ângulo θ). Aplicando as relações trigonométricas referentes as componentes deste triângulo ($\text{sen}\theta = y_p/r$ e $\text{cos}\theta = x_p/r$) na equação [A.4](#), obtemos;

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r} \right) \hat{i} + \left(\frac{vx_p}{r} \right) \hat{j} \quad (\text{A.5})$$

Ao apresentar a equação [A.5](#) que descreve a velocidade da partícula, os autores agora estão na quarta fase (MM) transitando para a quinta (RM), onde farão operacionalizações matemáticas com a equação encontrada para descrever esta respectiva velocidade, a qual no caso, trata-se de aplicar a derivada nesta equação para encontrar a relação que descreve a aceleração da partícula;

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j} \quad (\text{A.6})$$

Para a resolução da aplicação da derivada, os autores solicitam que os leitores atentem-se para o fato de que as taxas de variação y_p e x_p em função do tempo correspondem, respectivamente, as componentes y da velocidade v_y e x de v_x . E dado que $v_y = v \text{cos}\theta$ e $v_x = -v \text{sen}\theta$, as quais quando substituídas na solução da derivada de [A.5](#), obtemos;

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \text{cos}\theta \right) \hat{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \text{sen}\theta \right) \hat{j} \quad (\text{A.7})$$

Para continuar com a demonstração, foi evocado outro conceito apresentado no capítulo 3 - Vetores -, a definição de módulo de um vetor (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016, p.121):

Para determinar-se o módulo;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (\text{A.8})$$

E para determinar-se a direção do módulo

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \quad (\text{A.9})$$

Sendo assim, aplicando-se a equação A.8 na equação A.7, encontra-se o módulo que era intento demonstrar-se;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{1} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{A.10})$$

E para o caso da direção, aplica-se a equação A.9;

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta \quad (\text{A.11})$$

Onde os autores Halliday, Resnick e Walker (2016) concluem que como $\phi = \theta$, isto significa que o vetor \vec{a} aponta na direção do raio r , tendo como sentido o centro da circunferência.

Tendo finalizado as equações A.10 e A.11, chegou-se enfim na quinta fase (RM).

Exercício resolvido

Halliday, Resnick e Walker (2016) empenham-se em transitar da quinta fase (RM) para a sexta (RR) relacionando tais resultados matemáticos obtidos na demonstração com sentidos físicos, bem como a relação entre as grandezas a partir de um exercício resolvido.

Os autores trazem a problemática da aceleração centrípeta promovida nos corpos de pilotos de caça ao efetuarem curvas muito fechadas. Nesta contextualização é afirmado que a pressão no cérebro diminui devido ao fato da cabeça do piloto estar mais próxima do centro de curvatura do que os outros pontos do corpo, sendo assim tal fenômeno pode levar à perda das funções cerebrais, também conhecido por *g-LOC* (*g-induced loss of consciousness, em tradução literal: perda de consciência induzida por g*). Um dado importante na contextualização refere-se aos valores em que a aceleração centrípeta já começa a afetar o corpo humano, sendo por volta de $4g$ quando a visão começa a ficar preto e branco, assemelhando-se a “visão de túnel”.

Posteriormente, os autores fazem o questionamento sobre qual é o módulo da aceleração, em que o resultado deve ser dado em unidades de g , quando uma aeronave faz uma curva horizontal tendo uma velocidade inicial de $\vec{v}_i = (400\hat{i} + 500\hat{j})m/s$ durante um intervalo de tempo de $24s$, finalizando a curva com a velocidade final de $\vec{v}_f = (-400\hat{i} - 500\hat{j})m/s$.

Para solucionar o problemas os autores evocam a equação [A.2](#), com o intuito de explicitar o termo do raio (r) na equação e substituir seu valor pela equação [A.1](#).

Explicitando o raio (r) da equação [A.2](#):

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow r = \frac{Tv}{2\pi}$$

Explicitando o raio (r) da equação [A.1](#):

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a}$$

Substituindo o raio (r) da equação [A.2](#) pelo valor da equação [A.1](#), obtêm-se:

$$\frac{Tv}{2\pi} = \frac{v^2}{a} \Rightarrow \therefore a = \frac{2\pi v}{T} \quad (\text{A.12})$$

Como trata-se de um movimento circular uniforme, para obter a velocidade escalar constante calcula-se o módulo do vetor, dado a equação [A.8](#), com as componentes da velocidade inicial:

$$v = \sqrt{(400m/s)^2 + (500m/s)^2} = 640,31m/s$$

Já o período do movimento é obtido pela interpretação de uma das informações dadas no enunciado. Visto que a velocidade final (\vec{v}_f) é equivalente ao valor negativo da velocidade inicial ($-\vec{v}_i$), conclui-se que a aeronave completou a curva final no mesmo intervalo de tempo que a primeira curva, portanto esta aeronave tem um período (T) igual a $48s$.

Desta forma, substituindo os valores de velocidade e período na equação, obtemos que:

$$a = \frac{2\pi(640,31m/s)}{48s} \Rightarrow a = 83,81m/s^2 \approx 8,6g$$

O resultado da equação não chega a ser discutido, visto que ele é maior do que o dado passado no enunciado quanto ao g-LOC (4g) podendo-se suscitar uma validação das operacionalizações realizadas.

Construção do conceito de velocidade angular

No capítulo dez, denominado como Rotação, [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) retomam sua externalização a respeito do conceito de aceleração centrípeta.

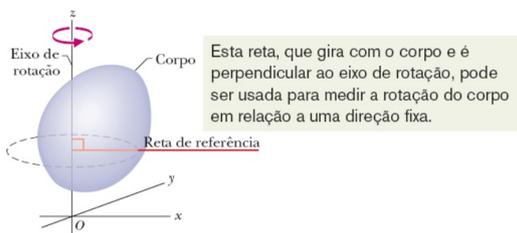
Agora, os autores apresentam as grandezas físicas de espaço percorrido e velocidade do corpo em termos de variáveis de movimento circular, para isto eles relacionam as variáveis descritas, anteriormente, por medidas lineares para circulares a partir do uso de análises geométricas do fenômeno.

Inicialmente, os autores partem da primeira fase (SR), colocando como objeto de estudo para a construção do conhecimento em questão, a situação de análise do movimento circular de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

Neste momento, eles efetuam o primeiro estágio de transição (compreensão da tarefa), conjecturando o fenômeno a partir do movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo de rotação, desta forma eles transitam para a segunda fase (RMS) ao definir o que é um corpo rígido e quais as formas possíveis dele efetuar seus movimentos.

Como definição para corpo rígido, os autores afirmam que o mesmo trata-se de todo objeto que gira tendo as partes que o compõe ligadas entre si sem mudar sua forma. Já para a definição de eixo fixo, eles afirmam que refere-se, de modo simplório, como um eixo que não altera sua posição.

Figura A.4 – Diagrama de movimento de um corpo rígido



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.603

A figura [A.4](#) é utilizada para apresentar o eixo de rotação e a reta de referência de um corpo rígido. [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), afirmam que o eixo de rotação é um eixo fixo em um determinado espaço pertencente a um plano cartesiano r^n (este plano pode ter n dimensões) em que o corpo irá girar em torno deste. Já a reta de referência trata-se de uma linha retilínea fixa ao corpo que está promovendo o movimento de rotação utilizada para marcar as posições angulares nos intervalos de tempo estudado no fenômeno.

Os autores diferenciaram três tipos de movimentos relacionados a corpos rígidos em seu respectivo texto:

O primeiro é denominado como rotação pura (movimento angular), neste caso todos os pontos pertencentes ao corpo irão se mover em trajetórias circulares cujo o centro

está no eixo de rotação, sendo assim todos os pontos descrevem o mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo.

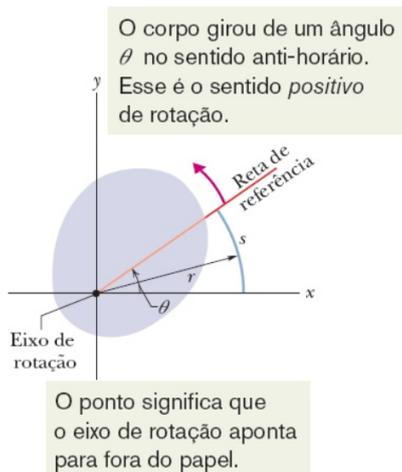
O segundo é o movimento de translação pura (movimento linear), este por sua vez, ocorre que todos os pontos do corpo rígido se movem em linhas retas, percorrendo distâncias iguais no mesmo intervalo de tempo.

Já o terceiro movimento ficou implícito nos argumentos, compreendido como uma mistura dos movimentos de translação e rotação.

A apresentação destes três tipos de movimento é uma organização lógica e simplificada da conjectura do fenômeno, sendo assim os autores efetuam o segundo estágio de transição (simplificando/estruturando a tarefa), pois além de explicitar um levantamento e simplificação das informações à respeito do fenômeno, os autores indicam que a construção dos conceitos em termos de variáveis de rotação será feito tendo como base o movimento de rotação pura, ou seja delimitam o caso a ser investigado. Portanto a externalização feita pelos autores encontra-se, agora, na terceira fase (MR).

Neste momento os autores efetuam o terceiro estágio de transição (matematização), saindo da terceira fase (MR) para a quarta (MM), onde eles têm como intuito apresentar as equações em termos de variáveis de rotação que farão parte da construção do conceito.

Figura A.5 – Diagrama de posição angular



A primeira equação é obtida através da definição de posição angular, sendo conceitualizada pelos autores, com auxílio da figura [A.5](#), como o ângulo em que a reta de referência faz com uma dada direção fixa. Os autores efetuam a transposição desta afirmação para uma estrutura lógica matemática evocando conceitos que estão de acordo com a geometria, afirmando que o ângulo θ será equivalente a razão entre o arco de circunferência (s) e o raio (r) em questão.

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{A.13})$$

Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.605)

Os autores apresentam uma forma para relacionar três tipos diferentes de se medir ângulos: graus, revolução e radianos, afirmando que para o respectivo estudo o mais adequado para se medir o ângulo é em radianos;

$$1rev = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi rad \quad (\text{A.14})$$

$$1\text{rad} = 57,3^\circ = 0,159\text{rev} \quad (\text{A.15})$$

As equações [A.14](#) e [A.15](#) expostas por [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), apresentam os fatores de conversão entre as respectivas unidades.

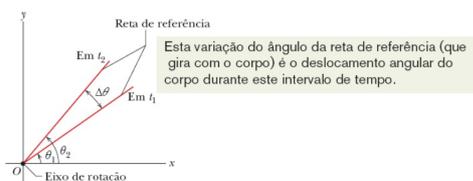
Posteriormente, estrutura-se o conceito de deslocamento angular, que iniciou-se com os autores estabelecendo que quando a reta de referência muda sua posição, rotacionando em torno de um eixo, todos os pontos que pertencem a ela sofrem um deslocamento angular igual, sendo θ_1 a posição angular referente ao intervalo de tempo t_1 (inicial) e θ_2 a posição angular no intervalo de tempo t_2 (final). Portanto, o deslocamento angular é definido como a taxa de variação entre os ângulos estudados no fenômeno.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (\text{A.16})$$

Os autores também apresentam a convenção de que todo deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, indicando o relógio como um exemplo de deslocamento negativo. Para esta argumentação feita, [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) propõem a seguinte definição:

Definição A.2 (Sentido do Deslocamento Angular). *Um deslocamento angular no sentido anti-horário é positivo, e um deslocamento angular no sentido horário é negativo.*

Figura A.6 – Diagrama de velocidade angular



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.607

O último termo de variáveis de rotação a ser analisado é a velocidade angular, definida no livro-texto a partir de uma situação hipotética proposta por Halliday, em que um corpo está na posição angular θ_1 no instante t_1 , enquanto que em um momento posterior, o instante t_2 , este corpo estará na posição angular θ_2 . Para esta demonstração, a figura [A.6](#) é utilizada para elucidar a situação hipotética.

Sendo assim, o autor define que a velocidade angular média será a razão entre a taxa de variação da posição angular ($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$) e a taxa de variação entre os instantes respectivos as posições angulares ($\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (\text{A.17})$$

Já para o caso da velocidade angular instantânea, os autores efetuam o quarto estágio (operacionalizações matemáticas) de transição de fases, partindo da quarta (MM) para a quinta fase (RM) ao aplicarem o limite da razão na equação [A.17](#) quando sua taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$).

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{A.18})$$

É realizada uma interpretação simplória da velocidade angular instantânea, apresentada pelos autores como a velocidade angular do corpo em um dado instante específico de t . Ainda nesta mesma argumentação, [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) afirmam que caso seja conhecida a função espacial angular em termos do tempo decorrido ($\theta(t)$) pode-se obter o valor da velocidade angular (ω) por meio de uma operacionalização matemática, sendo ela a aplicação da derivada de primeira ordem da função espacial angular como visto na equação [A.18](#)

Os autores definem a aceleração angular média ($\alpha_{méd}$) como a razão entre a taxa de variação da velocidade angular ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$) e a taxa de variação entre os instantes respectivos as velocidades angulares ($\Delta t = t_2 - t_1$).

$$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (\text{A.19})$$

Já aceleração angular instantânea é definida o ser aplicado o limite da razão na equação [A.19](#) quando sua taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$).

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{A.20})$$

Exercício resolvido

Os autores procuraram efetivar a transição entre a quinta (RM) para a sexta fase (RR) confrontando os resultados matemáticos alcançados na construção do conceito de velocidade angular com problemas físicos que se aproximam de situações reais a partir da relação entre as grandezas envolvidas com a apresentação de um exercício resolvido.

Neste sentido, os autores propõem o cálculo da velocidade angular a partir da aceleração angular e o cálculo da posição angular a partir da velocidade angular, para isto é apresentado uma situação hipotética de um pião girando com uma aceleração angular descrita pela função $\alpha = 5t^3 - 4t$, em que o tempo (t) é dado em segundos e a aceleração (α) em radianos por segundo ao quadrado. Também é informado que no instante $t = 0$ a velocidade angular (ω) é igual a 5rad/s e a posição angular (θ) de uma reta de referência disposta no pião está é de 2rad .

A priori os autores evocam a definição da equação [A.20](#), afirmando que a função da aceleração angular ($\alpha(t)$) é a primeira derivada da função da velocidade angular ($\omega(t)$) e propõem que seja feito o processo de cálculo inverso, neste caso o integrativo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt$$

Integrando a definição da equação A.21:

$$\int d\omega = \int \alpha dt \Rightarrow \therefore \omega = \int \alpha dt \quad (\text{A.21})$$

Aplicando a função da aceleração angular na equação [A.21](#):

$$\begin{aligned} \omega &= \int (5t^3 - 4t) dt \Rightarrow \omega = \frac{5t^4}{4} - \frac{4t^2}{2} + c \\ \Rightarrow \therefore \omega &= \frac{5t^4}{4} - 2t^2 + c \end{aligned}$$

Como no instante $t = 0$ a velocidade angular é igual a $\omega = 5\text{rad/s}$:

$$5\text{rad/s} = \frac{5}{4}0^4 - 2 \cdot 0^2 + c \Rightarrow 5\text{rad/s} = c$$

Então a expressão de velocidade angular é:

$$\therefore \omega = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5$$

Os autores evocam a definição da equação [A.18](#), afirmando que a velocidade angular é a primeira derivada da função da posição angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

Integrando a definição da equação A.22:

$$\int d\theta = \int \omega dt \Rightarrow \therefore \theta = \int \omega dt \quad (\text{A.22})$$

Aplicando a função da velocidade angular na equação [A.22](#):

$$\begin{aligned} \theta &= \int \left(\frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5 \right) dt \Rightarrow \theta = \frac{5t^5}{20} - \frac{2t^3}{3} + 5t + c \\ \therefore \theta &= \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + c \end{aligned}$$

Como no instante $t = 0$ a posição angular é igual a $\theta = 2rad$:

$$2rad = \frac{1}{4}0^5 - \frac{2}{3}0^3 + 5\cdot 0 + c \Rightarrow 2rad = c$$

Então a expressão de posição angular é:

$$\therefore \theta = \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2$$

Construção do conceito de aceleração centrípeta fazendo uso das relações entre as variáveis lineares e angulares

Nesta seção, os autores citam que o conceito de movimento circular uniforme já fora discutido anteriormente, mais especificamente no capítulo 4-5, denominado como Movimento circular uniforme, sendo estruturado com base na velocidade linear escalar ($|v|$) constante ao longo de uma circunferência, porém os autores retomam novamente a construção do conceito neste capítulo estruturando-o com o uso das relações entre variáveis lineares e angulares.

Para isto os autores idealizam uma situação hipotética, colocando um carrossel como analogia para um corpo rígido e afirmando que todas suas partículas completam uma volta na circunferência com o mesmo intervalo de tempo, justificando este fato com o argumento de que todas as partículas têm a mesma velocidade angular ω . Sendo assim, os autores partem da primeira fase (SR), idealizando como objeto de estudo para a construção do conhecimento, a análise da situação hipotética do carrossel. Eles realizam o primeiro estágio de transição (compreensão da tarefa), ao proporem a analogia do carrossel ao movimento circular uniforme, transitando para a segunda fase (RMS) ao induzir proposições quanto ao carrossel em relação a velocidade linear (v) e angular (ω), afirmando que quanto mais afastada uma partícula estiver do eixo de rotação, maior será a circunferência que descreve seu movimento, conseqüentemente maior será sua velocidade escalar v , pois o comprimento da circunferência também será maior, entretanto sua velocidade angular ω não se altera independentemente da distância.

O segundo estágio de transição (simplificando/estruturando a tarefa) é feito com a discriminação de relações das variáveis lineares (arco de circunferência, velocidade linear e aceleração linear) com o conjunto de variáveis angulares (posição angular, a velocidade angular e a aceleração angular) sendo todos relacionados pelo valor da distância perpendicular do ponto em que a partícula se encontra até o eixo de rotação (valor do raio), o que por conseqüência faz com que a estruturação sai da segunda fase (RMS) para a terceira (MR).

A partir de então, inicia-se o terceiro estágio de transição (matematização), onde os autores vão para a quarta fase (MM) ao propor modelos matemáticos que relacionem as variáveis lineares com angulares fazendo uso do valor do raio da circunferência do trajeto percorrido pela partícula.

A posição da partícula será obtida através de uma manipulação algébrica da equação [A.13](#), isolando o arco de circunferência.

$$s = \theta r \tag{A.23}$$

Ao fazer está operacionalização matemática, os autores efetivaram o quarto estágio de transição de fases (operacionalizações matemáticas), saindo da quarta fase (MM) para a quinta (RM), definindo a posição da partícula por meio da definição de arco de circunferência, dado pelo produto entre ângulo que a reta de referência faz com um eixo fixo de direção e o raio do trajeto circular.

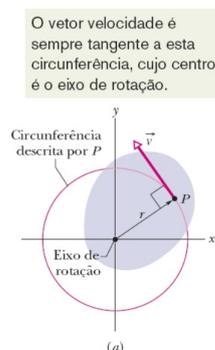
Para a relação entre grandezas lineares e angulares referentes a velocidade, é feito um processo similar. Os autores efetivam o quarto estágio de transição (operacionalizações matemáticas), saindo da quarta fase (MM) para a quinta (RM), ao aplicar uma derivada de primeira ordem na equação [A.23](#).

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r \tag{A.24}$$

Onde ds/dt é a velocidade linear escalar, $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω descrita pelo corpo em rotação e r é uma constante que representa o valor do raio do trajeto circular percorrido pelo corpo, desta forma obtêm-se o resultado matemático:

$$v = \omega r \tag{A.25}$$

Figura A.7 – Direção da velocidade linear



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#), p.623

A equação [A.25](#) mostra que os pontos do corpo que possuem os maiores valores de r (os pontos mais distantes do eixo de rotação) têm uma velocidade linear escalar (v) maior.

Os autores utilizam a figura [A.7](#) para elucidar o fato da velocidade linear escalar (v) sempre ser tangente a trajetória circular descrita pelo movimento que o corpo efetua.

Os autores novamente executam o quarto estágio de transição (operacionalizações matemáticas), indo da quarta fase (MM) para a quinta (RM), ao definir o período de

revolução, afirmando que este é calculado através da razão entre o comprimento de circunferência e a velocidade linear escalar.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{A.26})$$

Halliday, Resnick e Walker (2016) citam que se for necessário que a equação A.26 esteja em termos de velocidade angular, basta aplicar a equação A.25 em A.26, substituindo a variável escalar pela circular e cancelando r .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.27})$$

O processo de execução do quarto estágio de transição (operacionalizações matemáticas), indo da quarta fase (MM) para a quinta (RM) é feito novamente, desta vez para definir o conceito de aceleração. Para isto os autores propõem que seja aplicado uma derivada de primeira ordem na equação A.25 em relação ao tempo, considerando r constante.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \quad (\text{A.28})$$

O resultado encontrado representa apenas uma parte da aceleração linear, sendo esta a responsável por variações no módulo de v (velocidade linear escalar). Este resultado obtido é chamado de aceleração tangencial (a_t) da aceleração linear, dado por:

$$a_t = \alpha r \quad (\text{A.29})$$

Os autores voltam a evocar a equação A.1 a fim de argumentar que esta trata-se da outra parte que representa a influência na aceleração deste fenômeno, dado que quando uma partícula se move em um movimento circular uniforme, irá existir uma componente radial da aceleração linear, $a_r = v^2/r$ (com sentido dirigido radialmente para o centro da circunferência). Ela é responsável pelas variações na direção da velocidade linear do vetor \vec{v} .

Aplicando a equação A.25 em A.1, obtêm-se, a partir da substituição da variável da velocidade linear v que:

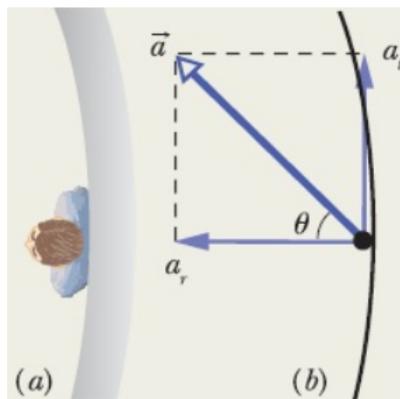
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{A.30})$$

Exercício resolvido

Os autores buscaram realizar a transição da quinta (RM) para a sexta fase (RR) efetuando comparações entre os resultados matemáticos oriundos da demonstração do conceito de aceleração centrípeta a partir do uso das relações entre as variáveis lineares e angulares com a resolução de um exercício de física envolvendo de uma situação próxima da realidade relacionando as grandezas envolvidas no fenômeno em questão.

Neste exercício foi proposto a construção de um brinquedo (um anel gigante giratório que mantém as pessoas pressas nas paredes por conta da aceleração promovida no movimento circular uniforme, ver figura [A.8](#)) em que é necessário o cálculo, no instante de $t = 2,2s$, da velocidade angular (ω), a velocidade linear (v), a aceleração angular (α), a aceleração tangencial (a_t), a aceleração radial (a_r) e o módulo do vetor aceleração (\vec{a}) das pessoas que estão dentro do brinquedo.

Figura A.8 – Vista superior do brinquedo com um passageiro pronto e as componentes radial e tangencial do vetor aceleração



Fonte: [Halliday, Resnick e Walker \(2016\)](#) p.625)

Para este cálculo foram fornecidas as informações do raio (r) do brinquedo ($r = 33,1m$) e que no intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = 2,3s$, a posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do anel será:

$$\theta = c \cdot t^3 \quad (\text{A.31})$$

Sendo solicitado considerar $c = 6,39 \cdot 10^{-2} rad/s^3$.

Para calcular a velocidade angular (ω) foi evocado a equação [A.18](#) com intuito de efetuar o cálculo da derivada de primeira ordem da função horária da posição angular, aplicar os dados do enunciado e encontrar o valor pedido:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{d}{dt}(ct^3) \\ \Rightarrow \omega &= 3ct^2 \Rightarrow \omega = 3(6,39 \cdot 10^{-2} \text{rad/s}^3) \cdot (2,2\text{s})^2 \\ \therefore \omega &= 0,928 \text{rad/s}\end{aligned}$$

Para calcular a velocidade linear (v) foi evocado a equação [A.25](#) com a intenção de aplicar os dados do enunciado nos devidos termos, possibilitando encontrar o valor solicitado:

$$\begin{aligned}v &= \omega r \Rightarrow v = 3ct^2 r \\ \Rightarrow v &= 3(6,39 \cdot 10^{-2} \text{rad/s}^3)(2,2\text{s})^2(33,1\text{m}) \\ \therefore v &= 30,7 \text{m/s}\end{aligned}$$

Para calcular a aceleração angular (α) foi evocado a equação [A.20](#) objetivando a execução do cálculo da derivada de primeira ordem da função horária da velocidade angular, que posteriormente, ao aplicar os dados do enunciado, encontra-se o que foi pedido no enunciado:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d}{dt}(3ct^2) \\ \Rightarrow \alpha &= 6ct \Rightarrow \alpha = 6(6,39 \cdot 10^{-2} \text{rad/s}^3) \cdot (2,2\text{s}) \\ \therefore \alpha &= 0,843 \text{rad/s}^2\end{aligned}$$

Para calcular a aceleração tangencial (a_t) foi evocado a equação [A.29](#) a fim de aplicar nos devidos termos os dados do enunciado de modo a encontrar o valor requerido:

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha r \Rightarrow a_t = 6ctr \\ \Rightarrow a_t &= 6(6,39 \cdot 10^{-2} \text{rad/s}^3)(2,2\text{s})^2(33,1\text{m}) \\ \therefore a_t &\approx 27,9 \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Para calcular a aceleração radial (a_r) foi evocado a equação [A.30](#) com a intenção de aplicar os dados do enunciado nos devidos termos, possibilitando encontrar o valor solicitado:

$$\begin{aligned}a_r &= \omega^2 r \Rightarrow a_r = (3ct)^2 r \\ \Rightarrow a_r &= 9(6,39 \cdot 10^{-2} \text{rad/s}^3)^2(2,2\text{s})^4(33,1\text{m}) \\ \therefore a_r &\approx 28,5 \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Como vetor aceleração (\vec{a}), por definição, tem como componentes a aceleração tangencial e radial, admite-se o cálculo do módulo do vetor evocando a equação [A.8](#):

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \\ \Rightarrow |\vec{a}| &= \sqrt{(28,5m/s^2)^2 + (27,9m/s^2)^2} \\ \therefore |\vec{a}| &\approx 39,9m/s^2 \end{aligned}$$

E a orientação de \vec{a} :

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{a_t}{a_r} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{6ctr}{9c^2t^4r} \\ \Rightarrow \theta &= \tan^{-1} \frac{2}{3ct^3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{2}{3(6,39 \cdot 10^{-2}rad/s^3)(2,2s)^3} \\ \therefore \theta &= 44,4^\circ \end{aligned}$$

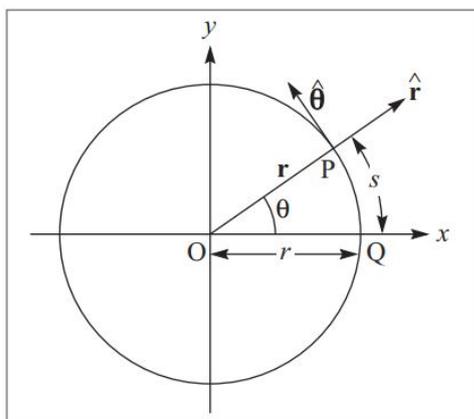
APÊNDICE B – ANÁLISE DA DEMONSTRAÇÃO DE ACELERAÇÃO CENTRÍPETA SEGUNDO MOYSÉS NUSSENZVEIG

Construção do conceito de Velocidade Angular:

O autor [Nussenzveig \(2013, p.77\)](#) inicia sua demonstração sobre a equação de aceleração centrípeta afirmando, em língua corrente, que o tipo de movimento descrito neste conceito é o de uma trajetória circular, a qual o módulo de sua velocidade instantânea deve ser constante, implicando-se assim, no fato de que a partícula estudada efetuará arcos de círculo iguais em tempos iguais, uma característica de fenômenos com movimentos periódicos. Ele ainda destaca que o conceito de período compreende-se como o tempo levado para se dar uma volta completa, colocando o relógio, a órbita de uma partícula carregada em um acelerador do tipo circular e a aproximação do movimento da lua em torno da terra, como analogias para tal conceito.

Esta descrição inicial feita pelo autor, trata-se de uma idealização do fenômeno estudado, sendo este um processo previsto no ciclo de modelagem matemática, especificamente, na transição da primeira fase (SR) para a segunda (RMS). Neste caso, o autor buscou descrever a conjectura fenomenológica, até então, por meio de um mecanismo textual, onde posteriormente, como previsto no primeiro estágio de transição (Compreensão da tarefa), o autor destaca as principais características que serão utilizadas para a construção do conceito.

Figura B.1 – Movimento Circular



Fonte: [Nussenzveig \(2013, p.77\)](#)

Logo em seguida, é efetuado a transição da segunda fase (RMS) para a terceira (MR), em que Nussenzveig organiza, de maneira lógica, as informações presentes na descrição inicial. Para isto, o autor traz a [Figura B.1](#) com a intenção de apresentar os entes matemáticos que servirão como base para estruturar matematicamente o conceito de movimento circular, sendo que para tal, foram introduzidos conceitos vetoriais e de geometria plana. A priori, Moysés definiu para sua demonstração que r é o raio da trajetória, P a posição da partícula, sendo que esta é definida pelo ângulo θ entre o vetor deslocamento $\vec{r} = \overline{OP}$ e o eixo Ox do sistema cartesiano com origem no centro do círculo.

Para estas informações iniciais, presentes na idealização da situação e, posteriormente, na compreensão da mesma, foi-se utilizado o estilo de pensamento matemático

integrado, visto que, inicialmente, Nussenzveig externalizou a sistematização das informações fazendo uso de uma representação pictórica - neste caso, a Figura B.1 - e também utilizou de conceitos matemáticos - tais quais os entes de vetor e geometria - para formalizar sua estrutura de pensamento.

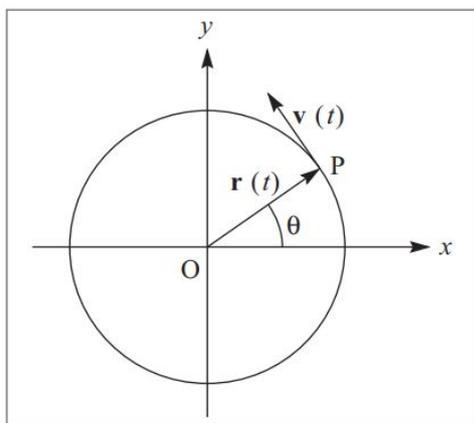
A partir de então, ocorrerá a transição da terceira fase (MR) para a quarta (MM), onde as descrições à respeito do fenômeno irão ter um nível matemático maior do que em comparação com as afirmações verbais iniciais, pois o autor executará a transposição das ideias para uma descrição formal, fazendo uso de símbolos, bem como a operacionalização matemática dos mesmos.

Sendo assim o autor apresenta uma relação matemática para descrever o arco s da trajetória circular em função do produto entre o raio r da circunferência com o ângulo θ ;

$$s = r \cdot \theta \quad (\text{B.1})$$

No caso do ângulo θ , Moysés argumentou que o mesmo é medido em radianos, definindo-o como $2\pi rad = 360^\circ$.

Figura B.2 – Velocidade Instantânea



Fonte: Nussenzveig (2013, p.77)

Posteriormente, Nussenzveig faz uso de uma estrutura matemática apresentada no capítulo 2 - Movimento Unidimensional - quando discute velocidade média;

$$x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) \quad (\text{B.2})$$

Onde $x(t)$ é a posição final em função do tempo, x_0 é a posição inicial da partícula, v é a velocidade que o corpo descreve e $t + t_0$ é a soma das parcelas referentes aos valores de tempo referente aos momentos, respectivamente, final e inicial.

Entretanto, ele faz uma transposição, relacionando a variável linear, posição (x), presente na equação B.2 com a variável circular de arco, (s), descrita na equação B.1 resultando na seguinte equação;

$$s = s_0 + v \cdot (t - t_0) \quad (\text{B.3})$$

Sendo s_0 o valor do arco no instante inicial (t_0) e v a velocidade linear com que o arco s é descrito no momento final (t), temos como consequência imediata que $v = ds/dt$.

Quanto a esta transposição da equação horária linear para circular, Nussenzveig faz uma aproximação das variáveis $|\Delta \vec{r}|$ (corda) e Δs (arco), como sendo iguais quando a taxa de variação de tempo tender a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), o que por consequência implica

na velocidade linear ser igual ao módulo da velocidade instantânea ($v = |\vec{v}|$) tangente a circunferência.

É apresentado a orientação do vetor da velocidade tangencial (\vec{v}) da seguinte forma;

$$\vec{v} = v \cdot \hat{\theta} \quad (\text{B.4})$$

Como já dito, Moysés quer demonstrar as equações que descrevem o movimento circular uniforme transformando as variáveis lineares para circulares. Portanto, ele agora apresenta duas grandezas, o período $[T]$, que basicamente é o tempo necessário para o corpo dar uma volta completa na circunferência ($2\pi r$).

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{B.5})$$

E a frequência $[\nu]$, que é equivalente ao inverso do período, ou seja, quantas rotações é possível fazer em uma unidade de tempo.

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (\text{B.6})$$

Agora, o autor começa a trabalhar mais focado no campo abstrato da conceitualização, fazendo uma transição entre a quarta fase (MM) para a quinta fase (RM), efetuando o quarto estágio (operacionalizações matemáticas). Ele constrói a relação entre a função linear e circular, aplicando manipulações algébricas, as quais ele coloca os as variáveis lineares em termos de circulares - aplicou a equação [B.1](#) na equação [B.3](#) e dividiu todos os termos da equação pelo raio r -, obtendo-se a equação horária do movimento circular em termos do ângulo θ e uma nova grandeza, a velocidade angular (ω).

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \quad (\text{B.7})$$

Onde θ_0 é o valor do ângulo entre o vetor deslocamento e o eixo cartesiano da abcissa no instante inicial (t_0), θ o valor do ângulo no momento final (t) e ω a velocidade angular.

Moyses omitiu o desenvolvimento para chegar-se na equação [B.7](#), tendo apenas definido, em seguida a esta mesma equação, que a velocidade angular (ω) é:

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (\text{B.8})$$

Uma das formas possíveis para se chegar nestas relações, equação [B.7](#) e equação [B.8](#), podem ser feitas seguindo a respectiva dedução:

$$\begin{aligned}
r \cdot \theta &= r \cdot \theta_0 + v \cdot (t - t_0) \\
\Rightarrow \frac{r \cdot \theta}{r} &= \frac{r \cdot \theta_0}{r} + \frac{v \cdot (t - t_0)}{r} \\
\Rightarrow \theta &= \theta_0 + \frac{v \cdot (t - t_0)}{r} \\
\Rightarrow \theta - \theta_0 &= \frac{v \cdot (t - t_0)}{r} \\
\Rightarrow \therefore \frac{\theta - \theta_0}{(t - t_0)} &= \frac{v}{r}
\end{aligned}$$

Onde admite-se que:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} \quad (\text{B.9})$$

Finalizando esta parte, o autor aplica a velocidade linear presente na equação [B.8](#) na equação [B.5](#) que descreve o período, chegando enfim na equação que define a velocidade angular em função do período ou da frequência.

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (\text{B.10})$$

Após formalizar o conceito de velocidade angular, Moysés interpreta a equação [B.10](#), passando da quinta fase (RM) para a sexta (RR), apresentando as unidades de medida da velocidade angular, relacionando o termo do numerador $[2\pi]$ com unidade de rad (radiano) e para o denominador $[T]$ a unidade de segundos e valida a equação tomando como exemplo a velocidade angular do ponteiro de segundos de um relógio;

"(...)velocidade angular do ponteiro dos segundos de um relógio, para o qual $T = 1$ min. é" ([NUSSENZVEIG, 2013](#)):

$$\omega = (2\pi/60)s^{-1} \approx 0,1s^{-1}(0,1rad/s)$$

Logo após a apresentação da equação, ele afirma que a velocidade linear é diretamente proporcional ao raio ($v = \omega r$), sendo assim, Moysés utilizou-se de duas formas simbólica proposta por [Sherin \(2001\)](#), denominadas como "balanceamento" e "coeficiente de escala", visto que o autor admite uma equivalência relativa entre as variáveis de velocidade linear e o raio da circunferência, tendo a velocidade angular como constante para este caso em específico.

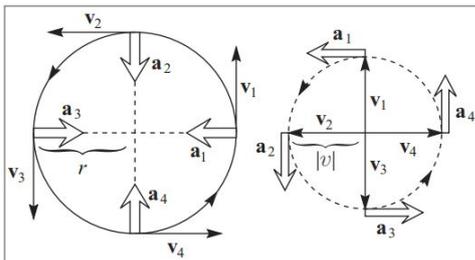
Por fim desta construção do conceito de velocidade angular, ele apresentou como atribuir sentido e direção para a velocidade, propondo aplicar a equação [B.4](#) na relação [B.8](#).

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{r} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{\hat{\theta}} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\therefore \vec{v} = \vec{\omega} r \hat{\theta} \quad (\text{B.11})$$

Construção do conceito de Aceleração Centrípeta pelo método do Hodógrafo:

Figura B.3 – Hodógrafo de um MCU



Fonte: [Nussenzveig \(2013\)](#), p.79

Moysés introduz o conceito de aceleração no movimento circular, partindo da primeira fase (SR) - onde ele afirma que a conjectura do problema se dá pelo fato de que mesmo o módulo do vetor velocidade linear permanecer constante, existe uma variação em sua direção ao longo do trajeto - transitando para a segunda fase (RMS) - momento em que ele propõe a hipótese de que existe uma aceleração a qual promove esta respectiva variação na direção da velocidade -.

A fim de organizar as ideias e hipóteses levantadas - transição da segunda fase (RMS) para a terceira (MR)-, o autor apresenta a Figura [B.3](#), relativa ao de conceito de hodógrafo, apresentado anteriormente na página 71 deste mesmo livro, onde Nussenzveig o definiu como um conjunto de vetores de velocidade - $\vec{v}(t)$ -, que compõe um trajeto curvilíneo descrito pelo movimento do corpo. Sendo que a aceleração centrípeta - $\vec{a}(t)$ - é tangente ao hodógrafo no ponto correspondente $\vec{v}(t)$ e a mesma não está associada com a variação do módulo da velocidade, mas sim com uma variação na direção desta velocidade.

Com isto, o autor Moysés afirma que uma forma possível de se obter a aceleração centrípeta \vec{a} é analisando geometricamente a figura do hodógrafo.

Nota-se então que ele escolheu, para esta demonstração em específico, uma rota no ciclo de modelagem fazendo-se o uso do estilo de pensamento matemático visual, pois além do fato de Moyses externalizar a construção do conhecimento partindo da Figura [B.3](#), suas respectivas análises, mesmo tendo a inclusão de equações, constituem-se de uma linha de raciocínio estruturada com o foco de investigações na imagem.

Para esta análise proposta pelo autor sobre a Figura [B.3](#), ele admite que o movimento descrito pelo hodógrafo também é o de um movimento circular uniforme, sendo que a velocidade, para este caso do hodógrafo, trata-se da aceleração ("velocidade de variação da velocidade") e o raio da circunferência é $|v|$ (módulo da velocidade linear). Substituindo a velocidade (que para o caso do hodógrafo admite-se que seja $|\vec{a}|$) e o raio (admitindo-se que seja $|v|$) na equação [B.8](#), obtemos;

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{v}{r} \Rightarrow v = \omega \cdot r \\
\Rightarrow |\vec{a}| &= \omega \cdot v \Rightarrow |\vec{a}| = \omega \cdot \omega \cdot r \\
\Rightarrow |\vec{a}| &= \omega^2 \cdot r \Rightarrow |\vec{a}| = \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot r \\
\Rightarrow |\vec{a}| &= \frac{v^2}{r^2} \cdot r \Rightarrow \therefore |\vec{a}| = \frac{v^2}{r}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Desta Forma, o autor saiu da terceira fase (MR) para a quarta (MM), no momento em que aplicou um vocabulário matemático na análise da Figura do Hodógrafo e, posteriormente, fez a transição para a quinta fase (RM), após efetuar as manipulações algébrica da equação [B.12](#), obtendo-se o resultado matemático $|\vec{a}| = v^2/r$.

Por fim, Moysés solicita ao leitor para que seja feita uma análise da figura do hodógrafo e notar que a orientação da direção e sentido vetoriais da aceleração será sempre dirigido ao centro, nota-se neste momento o uso de uma matemática instrumental, visto que não foram contextualizados nem justificados as operações quanto a orientação do vetor apresentada a seguir;

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -|\vec{a}|\hat{r} \\
\Rightarrow \vec{a} &= -\omega^2 r \hat{r} \\
\therefore \vec{a} &= -\frac{v^2}{r} \hat{r}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Construção do conceito de Aceleração Centrípeta pelo método de Incremento de Velocidade:

O autor Moysés propõe uma segunda maneira de deduzir a equação da aceleração centrípeta e, diferentemente da anterior, esta possui um caráter de estilo de pensamento matemático analítico, pois sua externalização sobre a construção do conceito acerca de aceleração do movimento circular é focada no uso e análise dos símbolos matemáticos.

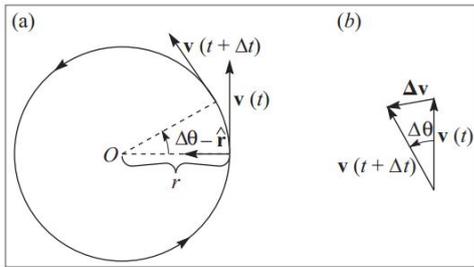
Desta vez, a transição da primeira fase (SR) - variação da direção de velocidade linear - para a segunda (RMS) - descrição da conjectura fenomenológica - é feita a partir da seguinte equação;

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{B.14}$$

A definição de aceleração apresentada na equação [B.14](#), foi deduzida no capítulo 3 - Movimento Bidimensional - e é utilizada como ponto de partida para a construção do

conceito, onde o autor tem como objetivo aplicar a ideia de taxa de variação, neste caso o de velocidade, em função do tempo, com intuito de encontrar a aceleração que descreve o fenômeno.

Figura B.4 – Incremento de velocidade



Fonte: Nussenzveig (2013, p.80)

Moysés efetua a transição da segunda fase (RMS) para a terceira (MR) ao estruturar a descrição do movimento discutindo a relação entre o incremento de Δt da função velocidade $\vec{v}(t)$ e $\vec{v}(t + \Delta t)$ presente nas figuras B.4 (a) e B.4 (b), afirmando existir uma correspondência com $\Delta\theta$, argumentando que no limite de $\Delta t \rightarrow 0$ (que implica em $\Delta\theta \rightarrow 0$), $\Delta\vec{v}$ tende a apontar na direção de $-\hat{r}$. O autor ainda admite para o mesmo caso do incremento de $\Delta t \rightarrow 0$, a aproximação do comprimento de $\Delta\vec{v}$ (corda) sendo igual ao arco de círculo de raio $|v|$.

Chegando na conclusão descrita pela seguinte equação, onde o autor parte da terceira fase (MR) direto para a quinta fase (RM);

$$|\Delta\vec{v}| \approx |\vec{v}|\Delta\theta \left\{ \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx |v| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right. \quad (\text{B.15})$$

Moysés omitiu o desenvolvimento das manipulações para chegar na conclusão de B.15, sendo esta as transições para a quarta (MM) e, posteriormente, a quinta fase (RM) de modelagem, ficando a cargo do leitor.

Uma possível maneira de demonstrar tal conclusão é efetuar-se a transição da terceira (MR) para a quarta (MM), onde evoca-se a equação B.1 como ponto de partida para a dedução:

$$s = r \cdot \Theta$$

Como pedido por Nussenzveig, aproximasse o arco de circunferência s da corda $\Delta\vec{v}$ e o raio r da circunferência para v , obtendo-se:

$$|\Delta\vec{v}| = |v| \cdot \Delta\theta \quad (\text{B.16})$$

Por fim, realizamos a transição da quarta (MM) para a quinta fase (RM), onde efetuamos as devidas operações matemáticas ao aplicar a definição de aceleração presente na equação [B.14](#) na equação [B.16](#), obtendo-se assim o resultado esperado de aceleração centrípeta:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta v}{\Delta t} &= v \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \\
 \Rightarrow a &= v \cdot \omega \Rightarrow a = \omega \cdot r \cdot \omega \\
 \Rightarrow a &= \omega^2 \cdot r \Rightarrow a = \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot r \\
 \Rightarrow a &= \frac{v^2}{r^2} \cdot r \Rightarrow \therefore a = \frac{v^2}{r}
 \end{aligned}
 \tag{B.17}$$

ANEXO A – DESCRIÇÃO DAS FORMAS SIMBÓLICAS DO AUTOR SHERIN

Abaixo encontra-se uma síntese das descrições relativas as formas simbólicas propostas pelo autor Sherin (2001, p.532)

Forma Simbólica: Termos Concorrentes

Grupo: Termos Concorrentes

Padrão Simbólico: $\square \pm \square \pm \square \dots$

Descrição: Utilizado, frequentemente, na descrição de quantidades que possuem orientação, tais como; força, aceleração, momento linear e entre outros, sendo que seu uso é, normalmente, feito com aporte de diagramas (corpo livre, forças...), visto que esta forma simbólica tem como intento apontar quais as influências que os termos exercem na equação em geral, tomando como base para esta análise os sinais de cada termo que estão associados com suas respectivas orientações vetoriais.

Forma Simbólica: Oposição

Grupo: Termos Concorrentes

Padrão Simbólico: $\square - \square$

Descrição: Termos concorrentes separados por um símbolo de menos, semelhante a forma simbólica anterior, entretanto este difere-se por ser um caso particular, a qual sua característica é ser duas influências na equações que se opõem ("um contra o outro").

Forma Simbólica: Balanceamento

Grupo: Termos Concorrentes

Padrão Simbólico: $\square = \square$

Descrição: Forma simbólica usada para exprimir equivalência entre influências dentro de uma equação, de modo que os termos analisados que concorrem na igualdade se equilibrem.

Forma Simbólica: Cancelamento (a)

Grupo: Termos Concorrentes

Padrão Simbólico: $0 = \square - \square$

Descrição: Existem dois tipos de cancelamento, o primeiro trata-se de uma forma simbólica que possui grandes similaridades com as formas dos termos concorrentes e oposição, entretanto esta é uma interação entre duas influências que acabam por se cancelar, sendo que o resultado líquido da igualdade desta expressão é nulo, podendo ser um exemplo para tal forma simbólica o caso de conservação de energia.

Forma Simbólica: Prop+

Grupo: Proporcionalidade

Padrão Simbólico: $\left[\begin{array}{c} \dots x \dots \\ \dots \end{array} \right]$

Descrição: Forma simbólica que analisa um a relação que um dado valor possui diretamente proporcional a uma quantidade x , sendo que este número ou operação (x) aparece no numerador da fração em questão.

Forma Simbólica: Prop-

Grupo: Proporcionalidade

Padrão Simbólico: $\left[\begin{array}{c} \dots \\ \dots x \dots \end{array} \right]$

Descrição: Forma simbólica que analisa um a relação que um dado valor possui inversamente proporcional a uma quantidade x , sendo que este número ou operação (x) aparece no denominador da fração em questão.

Forma Simbólica: Razão

Grupo: Proporcionalidade

Padrão Simbólico: $\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$

Descrição: Forma simbólica que, geralmente, trata de um valor limite, onde quando considerando-se o numerador e denominador com a mesma unidade, trata-se de uma razão que pode ter como resultado uma proporção maior que, igual ou então menor que 1 ($x/y > 1$, $x/y = 1$ ou $x/y < 1$).

Forma Simbólica: Cancelamento (b)

Grupo: Proporcionalidade

Padrão Simbólico: $\left[\begin{array}{c} \dots x \dots \\ \dots x \dots \end{array} \right]$

Descrição: Segundo tipo de forma simbólica de cancelamento, onde os termos acabam

se cancelando devido ao fato dos termos referentes ao numerador e denominadores serem idênticos.

Forma Simbólica: Partes de um todo

Grupo: Termos que são Conjunto de Valores

Padrão Simbólico: $[\square + \square + \square \dots]$

Descrição: Similar aos termos que competem, entretanto eles não representam influências orientadas. Neste caso, são quantidades genéricas de algo que estão associadas a termos, sendo que um deste pode aumentar enquanto os demais se mantêm com valores fixos, ainda sim, o todo também aumenta.

Forma Simbólica: Base \pm Mudança

Grupo: Termos que são Conjunto de Valores

Padrão Simbólico: $[\square \pm \Delta]$

Descrição: Forma simbólica composta por dois termos que contribuem para o resultado líquido final, entretanto estes dois termos exercem funções distintas, sendo um o valor base (geralmente um valor inicial de uma dada quantidade de algo) e o outro um valor que será incrementado ao decorrer do tempo mudando esta base (ex; ganhos, correções...).

Forma Simbólica: Parte de um Todo

Grupo: Termos que são Conjunto de Valores

Padrão Simbólico: $\left[\square - \square \right]$

Descrição: Forma simbólica similar a Base \pm Mudança, entretanto difere-se desta pois um novo valor líquido é obtido subtraindo-se um valor de quantidade do valor total inicial.

Forma Simbólica: Mesma Quantidade

Grupo: Termos que são Conjunto de Valores

Padrão Simbólico: $\square = \square$

Descrição: Similar a forma simbólica balanceamento, entretanto esta difere-se pois os termos não se classificam como influências orientadas. Para este caso, são apenas entidades associadas com quantidades, uma de cada lado da igualdade da expressão matemática, sendo ambas de mesmo valor.

Forma Simbólica: Dependência

Grupo: Dependências

Padrão Simbólico: [... x ...]

Descrição: Esta forma simbólica, geralmente, está associada ao domínio da função que está sendo descrita, de modo que a dependência do valor referente ao resultado da equação seja em relação a um grupo de valores os quais são aplicados na equação.

Forma Simbólica: Sem Dependência

Grupo: Dependências

Padrão Simbólico: [...]

Descrição: Ao contrário da forma simbólica dependência, esta por sua vez, não possui um termo explícito na equação que seja tida como dependência do resultado.

Forma Simbólica: Dependência Única

Grupo: Dependências

Padrão Simbólico: [... x ...]*

Descrição: Similar a forma simbólica de dependência, entretanto, difere-se da mesma, pois neste caso existe apenas uma única quantidade que representa a dependência da equação.

Forma Simbólica: Coeficiente

Grupo: Coeficientes

Padrão Simbólico: [x □]

Descrição: Os coeficientes são formas simbólicas utilizadas para representar entidades matemáticas que ajustam a "intensidade" de um efeito. Normalmente, os coeficientes - tidos apenas como um número ou fator não dotados de unidades - aparecem do lado esquerdo de uma variável.

Forma Simbólica: Coeficiente de Escala

Grupo: Coeficientes

Padrão Simbólico: [n □]

Descrição: Similar a forma simbólica de coeficiente, diferindo-se pelo fato deste ter uma unidade atribuído a ele. Tem como papel matemático ser responsável pela da operação

que irá produzir um ente do mesmo tipo do resultado da equivalência relativa a igualdade da expressão, podendo ser um valor maior ou menor que o original.

Forma Simbólica: Intensivo-Extensivo

Grupo: Multiplicação

Padrão Simbólico: $x \cdot y$

Descrição: Forma simbólica que representa o produto entre termos do tipo intensivo e extensivo. Termos intensivos são caracterizados por terem unidades de medida compostas, por exemplo; uma quantidade de algo que opera-se, matematicamente, com uma unidade de outra coisa ($m/s, m^2, kg \cdot m/s \dots$). Já os extensivos são termos que possuem uma unidade de medida simples ($m, s, ^\circ c \dots$).

Forma Simbólica: Extensivo-Extensivo

Grupo: Multiplicação

Padrão Simbólico: $x \cdot y$

Descrição: Forma simbólica que representa o produto entre termos apenas do tipo extensivo, que como já dito, são os que possuem uma unidade de medida simples (unidades de área ou volume).

Forma Simbólica: Identidade

Grupo: Outras Formas

Padrão Simbólico: $x = \dots$

Descrição: Forma simbólica utilizada, geralmente, nas reflexões à cerca dos resultados obtidos, onde encontra-se a equivalência de propriedades e ou verdades lógicas dos termos do lado esquerdo e direito da equação matemática.

Forma Simbólica: Dying Away

Grupo: Outras Formas

Padrão Simbólico: $[e^{-x \dots}]$

Descrição: Esta forma simbólica representa uma operação a qual o resultado total diminui decorrente a influência de algum valor de parâmetro variável, o qual é o expoente da exponencial em questão.